BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR5311
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 03019242
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B54041
035/2: : |a (CaOTULAS)160126639
040: : |c MiU |d MiU
041:1 : |a ger |h und
050/1:0 : |a QA615 |b .L8
100:1 : |a Lobachevskii, N. I. |q (Nikolai Ivanovich), |d 1792-1856.
245:00: |a Pangeometrie, |c von N. J. Lobatschefskij. Kasan 1856. Uebers. und hrsg. von Heinrich Liebmann. Mit 30 Figuren im Text.
260: : |a Leipzig, |b W. Engelmann, |c 1902.
300/1: : |a 95, [1] p. |b diagr. |c 20 cm.
440/1: 0: |a Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. |v nr. 130
500/1: : |a First published in French under the title, "Pangéométrie, on Précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallels," in a collection issued by the professors of the University of Kasan, 1856. A Russian edition also published 1856.
650/1: 0: |a Geometry, Non-Euclidean
700/1:1 : |a Liebmann, Heinrich, |d 1874- |e ed. and tr.
998: : |c RSH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Nr. 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting (94 S.) *M* 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) *M* 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\ldots\ldots$$
(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) *M* 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) *M* 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) *M* 1.20.

» 78. **J. C. G. Jacobi,** Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) *M* 1.20.

» 82. **Jacob Steiner,** Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methodig, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) *M* 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) *M* 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) *M* 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) *M* 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) *M* 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) *M* 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) *M* 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) *M* 2.70.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) *M* —.90.

Nr. 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) *M* 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) *M* 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet**, Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel**, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) *M* 1.—.

» 117. **Gaspard Monge**, Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) *M* 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss**, Sechs Beweise des Fundamentaltheorems. über quadratische Reste. Herausgegeben von Eugen Netto. (111 S.) *M* 1.80.

» 123. **Jacob Steiner**, Einige geometrische Betrachtungen (1826). Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (125 S.) *M* 2.—.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier**, Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) *M* 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff**, Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (84 S.) *M* 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij**, Pangeometrie (Kasan 1856). Übersetzt und herausgegeben von Heinrich Liebmann. Mit 30 Figuren im Text. (96 S.) *M* 1.70.

Alexander Ziwet

Pangeometrie.

Von

N. J. Lobatschefskij.

Kasan 1856.

Uebersetzt und herausgegeben

von

Heinrich Liebmann.

Mit 30 Figuren im Text.

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1902.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

§ 1. Die ungenügende Begründung der gewöhnlichen Parallelentheorie . . . . . 5—6

§ 2. Neue Begründung der Parallelentheorie (Gerade, Ebene, Parallele, Winkelsumme im Dreieck, Parallelwinkel, Grenzkreis, Grenzkugel, Parallelismus von drei Geraden, Geometrie auf der Grenzkugel, Grenzkreisbogen zwischen Parallelen, Grenzkreissector) . . 6—12

§ 3. Geradlinige, sphärische und Grenzkugel-Dreiecke (Das geradlinige rechtwinklige Dreieck, das zugehörige sphärische rechtwinklige Dreieck, die einander zugehörigen geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke, das zugehörige rechtwinklige Dreieck auf der Grenzkugel, Anwendung auf das rechtwinklige sphärische Dreieck, das schiefwinklige sphärische Dreieck, Gültigkeit der sphärischen Trigonometrie), Berechnung der Function $\Pi(x)$ (Seite 22—24), Additionstheoreme der trigonometrischen Functionen von $\Pi(x)$, das geradlinige rechtwinklige Dreieck, das geradlinige schiefwinklige Dreieck (S. 25—31), das unendlich kleine Dreieck) . . 12—31

§ 4. Analytische Geometrie der Ebene (Gleichung des Kreises, Gleichung des Grenzkreises, Kreisumfang, Grenzkreisbogen (S. 34), Gleichung der Geraden, Parallele zur x-Axe, das geradlinige Viereck mit drei rechten Winkeln, das gemeinsame Lot von zwei Geraden, neue Form der Gleichung der Geraden) . . . . . 31—41

§ 5. Abstandsmessungen (Abstand von zwei Punkten, Bogenelement, Grenzkreisbogen, Polarcoordinaten, Bogenelement in Polarcoordinaten, Kreisumfang, Kreismessung auf der Grenzkugel) . . . . . 42—45

§ 6. Flächenmessungen in der Ebene (Flächenelement, Grenzkreissector, Parallelstreifen, Dreiecksinhalt, Inhalt des geradlinigen Polygons, Anwendung auf Integrale, angenäherte Integration, Flächenelement in Parallelcoordinaten, Kreisinhalt (S. 50), Dreiecksinhalt, das recht-

Seite

winklige Dreieck, Dreiecksinhalt in Parallelcoordinaten ausgedrückt, Grenzkreiscoordinaten) . . . . . 45—56

§ 7. Analytische Geometrie des Raumes (Grenzkreiscoordinaten, das Viereck zwischen zwei Loten auf der xy-Ebene, Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks ausgedrückt durch die Seiten, Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck, das schiefwinklige Dreieck ausgedrückt durch die Seiten, Oberflächenelement in rechtwinkligen Coordinaten, Kugeloberfläche (S. 67), neue Coordinaten, Grenzkreiscoordinaten zur Bestimmung des Raumelementes, Kugelinhalt (S. 71), Raumelement in Polarcoordinaten, Kugelinhalt (S. 73), Grenzkugelsector) . . . . . 56—75

§ 8. Rückblick. . . . . 75—76

§ 9. Gilt in unserm Raume die Pangeometrie? (Dreiecksmessungen, Probe durch Kreistheilung, Bestimmung von $\Pi(x)$ durch Fixsternbeobachtungen) . . . . . 76—78

Anmerkungen.

1. Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie . . . 79—81
2. N. J. Lobatschefskij's Leben und Werke. . . . . 81—83
3. Anmerkungen zur Uebersetzung . . . . . 83—95

Bemerkung: Inhaltsverzeichniss, Ueberschriften und Verweise auf andere Textstellen fehlen im Originale, ebenso die Figuren. Es ist hier dies alles zur Erleichterung der Lectüre hinzugefügt worden; die Zusätze im Texte sind durch *Cursivschrift* hervorgehoben.

Pangeometrie.

Von

N. J. Lobatschefskij.

§ 1. Die ungenügende Begründung der gewöhnlichen Parallelentheorie.

[**617**] Die Begriffe, auf welche man die elementare Geometrie begründet, sind nicht genügend, um daraus einen Beweis des Satzes abzuleiten, dass die Summe der drei Winkel eines jeden geradlinigen Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich ist, ein Satz, an dessen Wahrheit bisher niemand gezweifelt hat, weil man keinem Widerspruch in den Folgerungen begegnet, die man daraus abgeleitet hat, und weil die directen Messungen der Winkel der geradlinigen Dreiecke innerhalb der Fehlergrenzen der vollkommensten Beobachtungen mit diesem Satze übereinstimmen. [1])

Die Unzulänglichkeit der Grundbegriffe für den Beweis dieses Satzes hat die Geometer gezwungen, ausdrücklich oder versteckt Hülfsannahmen zuzulassen, die, wie einfach sie auch scheinen mögen, nichtsdestoweniger willkürlich und daher unzulässig sind. So nimmt man z. B. an, dass ein Kreis mit unendlich grossem Halbmesser in eine gerade Linie übergeht und eine Kugel mit unendlich grossem Halbmesser in eine Ebene, dass die Winkel jedes geradlinigen Dreiecks nur vom Verhältniss der Seiten abhängen und nicht von den Seiten selbst, oder endlich, wie das gewöhnlich in den Anfangsgründen der Geometrie geschieht, dass man durch einen gegebenen Punkt der Ebene nur eine einzige parallele Gerade zu einer andern in der Ebene gegebenen Geraden ziehen kann, während alle andern Geraden, die durch denselben Punkt und in derselben Ebene gezogen sind, wenn sie genügend verlängert sind,

die gegebene Gerade nothwendig schneiden müssen.[2]) Man versteht unter dem Namen: zu einer andern gegebenen Geraden parallele Gerade eine Gerade, die, wie weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern möge, niemals diejenige schneidet, zu welcher sie parallel ist. Diese Erklärung ist an und für sich ungenügend, denn sie kennzeichnet nicht genug eine einzige gerade Linie. Dasselbe kann man sagen von den meisten Erklärungen, welche gewöhnlich in den Anfangsgründen der Geometrie gegeben werden, denn diese Erklärungen zeigen nicht nur nicht die Entstehung derjenigen Grössen an, welche man erklärt, sondern sie zeigen auch nicht einmal, dass diese Grössen bestehen können. So erklärt man die gerade Linie und die Ebene durch eine ihrer Eigenschaften, man sagt, dass die geraden Linien diejenigen sind, welche völlig zusammenfallen, wenn sie zwei Punkte gemein haben, dass eine Ebene eine Fläche ist, [**618**] mit der eine gerade Linie immer zusammenfällt, sobald die Gerade zwei Punkte mit ihr gemein hat.

§ 2. Neue Begründung der Parallelentheorie.

[*Gerade.*] Statt die Geometrie mit der Ebene und der geraden Linie zu beginnen, wie man es gewöhnlich macht, habe ich es vorgezogen, sie mit der Kugel und dem Kreis zu beginnen, deren Erklärungen nicht dem Tadel unterworfen sind, unvollständig zu sein, weil sie die Entstehungsart der Grössen enthalten, welche man erklärt.

[*Ebene.*] Darauf erkläre ich die Ebene als den geometrischen Ort der Schnitte gleicher Kugeln, die um zwei feste Punkte als Mittelpunkte beschrieben sind. Endlich erkläre ich die gerade Linie als den geometrischen Ort der Schnitte von gleichen Kreisen, die alle in derselben Ebene gelegen und um zwei feste Punkte dieser Ebene als Mittelpunkte beschrieben sind. Nimmt man diese Erklärungen der Ebene und der geraden Linie an, dann kann die ganze Lehre von den Ebenen und den Loten auseinandergesetzt und mit grosser Einfachheit und Kürze bewiesen werden.

[*Parallele.*] Wenn eine Gerade und ein Punkt in einer Ebene gegeben ist, nenne ich Parallele zur gegebenen Geraden, gezogen durch den gegebenen Punkt, die Grenzgerade zwischen denjenigen unter den Geraden (die in derselben Ebene durch denselben Punkt gezogen sind und auf der einen Seite des von diesem Punkt auf die gegebene Gerade gefällten Lotes

verlängert sind), welche sie schneiden, und denen, welche sie nicht schneiden.

Ich habe eine vollständige Theorie der Parallelen veröffentlicht unter dem Titel »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Fincke'schen Buchhandlung.«[3]) In dieser Arbeit habe ich zuerst alle Lehrsätze auseinandergesetzt, die ohne Hülfe der Lehre von den Parallelen bewiesen werden können. [*Inhalt des sphärischen Dreiecks.*] Unter diesen Sätzen ist derjenige besonders bemerkenswerth, der die Beziehung des Flächeninhalts jedes sphärischen Dreiecks zur Oberfläche der ganzen Kugel angiebt, auf der es gezeichnet ist (Geometrische Untersuchungen § 27). Wenn A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreiecks bezeichnen und π zwei rechte Winkel, dann wird das Verhältniss des Flächeninhalts dieses Dreiecks zum Flächeninhalt der ganzen Kugel, der es angehört, gleich sein dem Verhältniss von

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi)$$

zu vier rechten Winkeln.[4])

[*Winkelsumme im Dreieck.*] Sodann beweise ich, dass die Summe der Winkel jedes geradlinigen Dreiecks niemals zwei rechte Winkel übertreffen kann (Geometrische Untersuchungen § 19)[5]) und dass, wenn diese Summe in einem beliebigen Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist, sie es in allen sein wird (Geometrische Untersuchungen § 20).[6]) So giebt es nur zwei mögliche Voraussetzungen: entweder ist die Summe der drei Winkel in jedem geradlinigen Dreieck zwei rechten Winkeln gleich, diese Voraussetzung giebt die [**619**] bekannte Geometrie, oder in jedem geradlinigen Dreieck ist diese Summe kleiner als zwei rechte Winkel, und diese Annahme dient zur Grundlage einer andern Geometrie, der ich den Namen imaginäre Geometrie gegeben hatte, aber die man vielleicht passender als Pangeometrie bezeichnet, weil dieser Name eine allgemeine geometrische Lehre bezeichnet, welche die gewöhnliche Geometrie als besonderen Fall enthält. [*Parallelwinkel.*] Es folgt aus den in der Pangeometrie angenommenen Grundlagen, dass ein Lot p, welches von einem Punkte einer Geraden auf eine ihrer Parallelen gefällt ist, mit der ersten zwei Winkel bildet, von denen der eine spitz ist. Ich nenne diesen Winkel Parallelwinkel und die Seite der ersten Geraden, wo er sich befindet, eine Seite, die für alle Punkte dieser Geraden dieselbe ist, Seite des Parallelismus. Ich bezeichne diesen

Winkel mit $\Pi(p)$, weil er von der Länge des Lotes abhängt. In der gewöhnlichen Geometrie hat man immer $\Pi(p)$ gleich einem rechten Winkel für jede Länge von p. In der Pangeometrie durchläuft der Winkel $\Pi(p)$ alle Werthe von Null an, welcher Werth $p = \infty$ entspricht, bis zu $\Pi(p)$ gleich einem rechten Winkel, für $p = 0$ (Geometrische Untersuchungen § 23). Um der Function $\Pi(p)$ einen allgemeineren analytischen Werth zu geben, nehme ich an, dass der Werth dieser Function für negatives p, ein Fall auf den sich die ursprüngliche Erklärung nicht ausdehnen lässt, festgesetzt ist durch die folgende Gleichung:

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi .$$

So kann man für jeden Winkel $A > 0$ und $< \pi$ eine Linie p finden, so dass $\Pi(p) = A$, wo die Linie p positiv sein wird, wenn $A < \frac{1}{2}\pi$. Umgekehrt giebt es für jede Linie p einen Winkel A, so dass $A = \Pi(p)$. [*Der Grenzkreis.*] Ich nenne Grenzkreis den Kreis, dessen Halbmesser unendlich gross ist, er kann näherungsweise gezogen werden, indem man auf die folgende Art so viel Punkte davon als man will zeichnet. Nehmen wir einen Punkt auf einer unbegrenzten Geraden, nennen wir diesen Punkt Scheitel und diese Gerade Axe des Grenzkreises, zeichnen wir einen Winkel $A > 0$ und $< \frac{1}{2}\pi$, dessen Scheitel mit dem Scheitel des Grenzkreises zusammenfällt, und dessen einer Schenkel die Axe ist, sei endlich a die Linie, welche giebt $\Pi(a) = A$, und tragen wir auf dem zweiten Schenkel des Winkels vom Scheitel aus die Strecke $2a$ ab, dann wird der Endpunkt dieser Strecke sich auf dem Grenzkreise befinden; um den Zug des Grenzkreises nach der anderen Seite fortzusetzen, wird man diese Construction auf dieser Seite wiederholen müssen. Es folgt, dass alle Geraden parallel zur Axe des Grenzkreises als Axe dienen können.[7] [*Die Grenzkugel.*] Die Drehung des Grenzkreises um eine seiner Axen erzeugt eine Fläche, die ich Grenzkugel nenne, und die folglich die Grenze ist, der die Kugel sich nähert, wenn ihr Halbmesser ins Unendliche wächst. Wir werden die Drehungsaxe, und folglich auch alle [**620**] Geraden, die zur Drehungsaxe parallel sind, Axen der Grenzkugel nennen, und Durchmesserebene jede Ebene, die eine oder mehrere Axen der Grenzkugel enthält. Die Schnitte der Grenzkugel mit ihren Durchmesserebenen sind Grenzkreise. Ein Theil der Oberfläche der Grenzkugel, der durch drei Bogen von Grenzkreisen

begrenzt wird, wird Grenzkugeldreieck genannt, die Grenzkreisbogen werden Seiten, und die Kantenwinkel zwischen den Ebenen dieser Bogen Winkel des Grenzkugeldreiecks genannt. [*Parallelismus dreier Geraden.*] Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind unter einander parallel.[8]) (Geometrische Untersuchungen § 25.) Es folgt daraus, dass alle Axen des Grenzkreises und der Grenzkugel unter einander parallel sind. [*Geometrie auf der Grenzkugel.*] Wenn drei Ebenen sich zu je zweien in drei parallelen Geraden schneiden, und wenn man jede Ebene begrenzt auf den Theil, welcher zwischen den beiden Parallelen gelegen ist, dann ist die Summe der drei Kantenwinkel, welche diese Ebenen bilden, zwei rechten Winkeln gleich.[9]) (Geometrische Untersuchungen § 28). Aus diesem Satze folgt, dass die Summe der Winkel jedes Grenzkugeldreiecks zwei rechten Winkeln gleich ist, und alles, was man in der gewöhnlichen Geometrie über die Verhältnisse der Seiten der geradlinigen Dreiecke beweist, kann folglich auch auf dieselbe Art in der Pangeometrie von den Grenzkugeldreiecken bewiesen werden, indem man nur die der einen Seite eines geradlinigen Dreiecks parallelen Geraden ersetzt durch Grenzkreisbogen, die durch die Punkte der einen Seite eines Grenzkugeldreiecks gezogen sind und alle denselben Winkel mit dieser Seite bilden. Wenn also zum Beispiel pqr die Seiten eines Grenzkugeldreiecks und P, Q, $\frac{1}{2}\pi$ die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind, so muss man genau wie für die geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke der gewöhnlichen Geometrie die folgenden Gleichungen annehmen

$$p = r \sin P = r \cos Q$$

$$q = r \cos P = r \sin Q$$

$$P + Q = \frac{\pi}{2}.$$

[*Abstand von zwei Parallelen.*] In der gewöhnlichen Geometrie beweist man, dass der Abstand von zwei parallelen Geraden constant ist.

In der Pangeometrie nimmt dagegen der Abstand p des Punktes einer Geraden von der parallelen Geraden nach der Seite des Parallelismus ab, d. h. nach der Seite, zu der der Parallelwinkel $\Pi(p)$ gewendet ist.[10])

[*Grenzkreisbogen zwischen Parallelen.*] Seien jetzt $s, s', s'', \ldots$ eine Reihe von Grenzkreisbogen, die zwischen zwei parallelen Geraden enthalten sind, und nehmen wir an, dass die Theile von jeder Parallele, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bogen enthalten sind, [**621**] alle unter einander gleich sind und gleich x, nennen wir E das Verhältniss von s zu s'

$$\frac{s}{s'} = E,$$

wo E eine Zahl ist, die grösser ist als die Einheit.

Setzen wir zuerst $E = \frac{n}{m}$, wo m und n ganze Zahlen sind, und theilen den Bogen s in m gleiche Theile. [*Fig. 1.*] Sei AB der erste Theil von s, $A'B'$ der erste Theil von s', $A''B''$ der erste Theil von s'' u. s. f., wo A, A', A'', ... die Punkte sind, welche auf einer der beiden gegebenen Parallelen gelegen sind, und

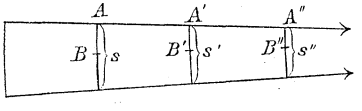

Fig. 1.

legen wir $A'B'$ derart auf AB, dass A und A' zusammenfallen, und dass $A'B'$ auf AB fällt. Wiederholen wir diese Aufeinanderlegung n-mal nach einander. Da nach Voraussetzung $s : s' = n : m$, so wird nothwendig $nA'B' = mAB$ sein, und da folglich das zweite Ende von $A'B'$ nach der n-ten Uebereinanderlagerung mit dem anderen Ende von s zusammenfällt, welches in n gleiche Theile getheilt sein wird, so werden $s', s'', \ldots$ auch jedes in m gleiche Theile getheilt durch die Parallelen zu den gegebenen parallelen Geraden. Wenn man aber bedenkt, dass, indem man die oben angegebene Uebereinanderlagerung ausführt, $A'B'$ den Theil der Ebene mit sich nimmt, der in diesem Bogen und den beiden Parallelen, die durch seine Endpunkte gezogen sind, begrenzt wird, so ist klar, dass, während n-mal $A'B'$ den ganzen Bogen s bedeckt, $nA''B''$ den ganzen Bogen s' bedecken wird und so weiter, weil in diesem Falle die Parallelen zusammenfallen müssen im ganzen Verlaufe, so dass man hat

$$nA''B'' = mA'B',$$

oder was dasselbe ist

$$\frac{s'}{s''} = \frac{n}{m} = E; \quad \frac{s'}{s''} = E \text{ u. s. w.},$$

was bewiesen werden sollte.

Um dasselbe zu beweisen in dem Falle, wo E eine irrationale Zahl ist, wird man eine der Methoden anwenden können, die in ähnlichen Fällen der gewöhnlichen Geometrie gebräuchlich sind, ich lasse die Einzelheiten der Kürze halber weg. Also ist

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} = \cdots\cdots = E.$$

Danach ist es nicht schwer zu schliessen, dass

$$s' = sE^{-x},$$

[**622**] wo E der Werth von $s : s'$ für den Fall, wo x, der Abstand zwischen den Bogen s und s', der Einheit gleich ist.

[*Grenzkreissector.*] Es muss bemerkt werden, dass das Verhältniss E nicht von der Länge des Bogens s abhängt und dasselbe bleibt, wenn die beiden gegebenen parallelen Geraden sich von einander entfernen oder sich einander nähern. Die Zahl E, welche nothwendig grösser als die Einheit ist, hängt nur von der Einheit der Länge ab, welche der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Bogen ist, und die vollkommen willkürlich bleibt. Die Eigenschaft, die wir soeben in Bezug auf die Bogen s, s', s'', ... bewiesen haben, bleibt bestehen für die Flächen P, P', P'', ..., die begrenzt sind von zwei aufeinanderfolgenden Bogen, und die beiden Parallelen. Man hat also

$$P' = PE^{-x}.$$

Vereinigen wir die n ähnlichen Flächen P, P', P'', ... $P^{(n-1)}$, so wird die Summe sein

$$P\frac{1 - E^{-nx}}{1 - E^{-x}}.$$

Für $n = \infty$ giebt dieser Ausdruck den Flächeninhalt des Theiles der Ebene zwischen zwei parallelen Geraden, der nach der einen Seite durch den Bogen s begrenzt wird und unbegrenzt ist nach der Seite des Parallelismus hin, und der Werth dieser Fläche wird sein

$$\frac{P}{1 - E^{-x}}.$$

Wählen wir als Flächeneinheit die Fläche P, welche eine Bogen von der Länge Eins und dem Werthe $x = 1$ entsp rich so wird sie allgemein für einen beliebigen Bogen s

$$\frac{Es}{E - 1}.$$

In der gewöhnlichen Geometrie ist das mit E bezeichnete Verhältniss constant und der Einheit gleich; es folgt daraus, dass in der gewöhnlichen Geometrie zwei parallele Gerade überall denselben Abstand haben, und dass die Fläche des Theiles der Ebene, welcher zwischen den beiden parallelen Geraden gelegen ist, und nur auf der einen Seite begrenzt ist durch das ihnen gemeinsame Lot, unendlich ist.

§ 3. Geradlinige, sphärische und Grenzkugel-Dreiecke.

[*Das geradlinige rechtwinklige Dreieck.*] Betrachten wir jetzt ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, während A, B, $\frac{1}{2}\pi$ die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind. Die Winkel AB können als Parallelwinkel $\Pi(a)$, $\Pi(\beta)$ aufgefasst werden, die Geraden von den positiven Längen α, β entsprechen. Kommen wir noch überein, von jetzt ab durch einen Buchstaben mit einem Accent eine Strecke zu bezeichnen, deren Länge einem [**623**] Parallelwinkel entspricht, welcher das Complement zu einem rechten Winkel ist von demjenigen Parallelwinkel, welcher einer Strecke entspricht, deren Länge mit demselben Buchstaben ohne Accent bezeichnet wird, so dass man immer hat

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\Pi(b) + \Pi(b') = \tfrac{1}{2}\pi.$$

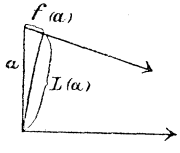

Fig. 2.

Bezeichnen wir [*Fig. 2*] mit $f(a)$ den Theil einer Parallelen zu einer Axe des Grenzkreises, welcher eingeschlossen ist zwischen dem zu dieser Axe im Scheitel des Grenzkreises errichteten Lot und dem Grenzkreise selbst, wenn diese Parallele durch einen Punkt des Lotes geht, dessen Abstand vom Scheitel a ist, und sei endlich $L(a)$ die Länge des Bogens vom Scheitel bis zu dieser Parallele.

In der gewöhnlichen Geometrie hat man

$$f(a) = 0$$
$$L(a) = a$$

für jede Linie a.

[*Das zugehörige sphärische rechtwinklige Dreieck*]. Ziehen wir [*Fig. 3*] zur Ebene des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten mit a, b, c bezeichnet worden sind, das Lot AA', welches durch den Scheitel A des Winkels $\Pi(\alpha)$ geht.

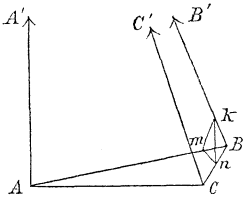

Fig. 3.

Lassen wir durch dieses Lot zwei Ebenen gehen, von denen die eine, welche wir die erste Ebene nennen werden, auch durch die Seite b hindurchgeht, und die andere die zweite Ebene durch die Seite c. Zeichnen wir in der zweiten Ebene die Gerade BB' parallel zu AA', die durch den Scheitel B des Winkels $\Pi(\beta)$ hindurchgeht, und lassen wir eine dritte Ebene durch BB' und die Seite a des Dreiecks hindurchgehen. Diese dritte Ebene wird die erste in einer Geraden CC', die zu AA' parallel ist, schneiden. Nehmen wir jetzt an, es sei eine Kugel beschrieben um den Punkt B als Mittelpunkt mit einem willkürlichen Halbmesser, der aber kleiner ist als a, eine Kugel, die folglich die beiden Seiten a, c des Dreiecks und die Gerade BB' in drei Punkten treffen wird, die wir so nennen werden: den ersten n, den zweiten m und den dritten k. Die Bogen der grössten Kreise, welche die Schnitte dieser Kugel mit den drei durch B gehenden Ebenen sind, Kreise, die die Punkte n, m, k zu je zweien verbinden, werden ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck bilden, dessen Seiten sein werden $mn = \Pi(\beta)$, $km = \Pi(c)$, $kn = \Pi(a)$. Der sphärische Winkel knm ist gleich $\Pi(b)$ und der Winkel kmn wird ein rechter sein. Da die drei Geraden unter einander parallel sind, so ist die Summe der drei Kantenwinkel, welche die von den Geraden AA', BB', CC' begrenzten Ebenentheile $AA'BB'$, $AA'CC'$, $BB'CC'$ mit einander bilden, zwei rechten gleich. Es folgt daraus, dass der dritte sphärische Winkel mkn gleich $\Pi(\alpha')$ ist. Man sieht also, dass jedem [624] geradlinigen rechtwinkligen Dreieck, dessen Seiten a, b, c und dessen gegenüberliegende Winkel $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ sind, ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck entspricht, dessen Seiten

$\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$, $\Pi(a)$ sind, und mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$, $\frac{1}{2}\pi$. [*Die einander zugehörigen geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke.*] Zeichnen wir [*Fig. 4*] ein anderes geradliniges rechtwinkliges Dreieck, dessen zu einander rechtwinklige Seiten α', a, dessen Hypotenuse g sei, während $\Pi(\lambda)$ der der Seite a, $\Pi(\mu)$ der der Seite α' gegenüberliegende Winkel ist. Gehen wir von diesem Dreieck zum sphärischen Dreieck über, welches ihm auf dieselbe Weise entspricht, wie das sphärische Dreieck kmn dem Dreieck ABC entspricht. Die Seiten dieses sphärischen Dreiecks sind folglich

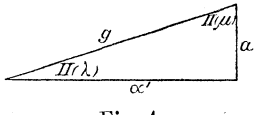

Fig. 4.

$$\Pi(\mu),\quad \Pi(g),\quad \Pi(a)$$

und die gegenüberliegenden Winkel

$$\Pi(\lambda'),\quad \Pi(\alpha'),\quad \frac{\pi}{2}$$

und seine Stücke werden den entsprechenden Stücken des sphärischen Dreiecks kmn gleich sein, denn die Seiten des letzteren waren

$$\Pi(c),\quad \Pi(\beta),\quad \Pi(a)$$

und die gegenüberliegenden Winkel

$$\Pi(b),\quad \Pi(\alpha'),\quad \frac{\pi}{2},$$

was zeigt, dass die sphärischen Dreiecke dieselbe Hypotenuse haben und einen anliegenden Winkel gleich.

Daraus folgt, dass

$$\mu = c,\quad g = \beta,\quad b = \lambda'$$

und es setzt also das Vorhandensein eines geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten

$$a,\ b,\ c$$

und den gegenüberliegenden Winkeln

$$\Pi(a),\quad \Pi(\beta),\quad \frac{\pi}{2}$$

das Vorhandensein eines anderen geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks voraus mit den Seiten

$$a,\ \alpha',\ \beta$$

und den gegenüberliegenden Winkeln

$$\Pi(b'),\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}\cdot$$

Man drückt dieselbe Sache aus, indem man sagt, dass, wenn

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$$

[**625**] die Stücke eines geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks sind,

$$a,\ \alpha',\ \beta,\ b',\ c$$

die entsprechenden Stücke eines andern geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks sein werden. [*Das zugehörige rechtwinklige Dreieck auf der Grenzkugel.*] Wenn wir eine Grenzkugel construiren, [*Fig. 5*] von der das auf der Ebene des rechtwinkligen Dreiecks errichtete Lot AA' eine Axe ist und der Punkt A der Scheitel, dann werden wir ein Dreieck haben, das auf der Grenzkugel gelegen ist und erzeugt ist durch ihren Schnitt mit den drei Ebenen, welche durch die drei Seiten des gegebenen Dreiecks gelegt sind. Bezeichnen wir die drei Seiten des Grenzkugeldreiecks mit p, q, r, so dass p der Schnitt der Grenzkugel mit der durch a, q der Schnitt der Grenzkugel mit der durch b, endlich r der Schnitt der Grenzkugel mit der durch c gelegten Ebene ist; dann werden die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel sein: $\Pi(a)$ gegenüber p, $\Pi(a')$ gegenüber q und ein rechter Winkel gegenüber r. Nach den oben [*Seite 12, Fig. 2*] getroffenen Verabredungen ist $q = L(b)$, $r = L(c)$. Die Grenzkugel wird die Gerade CC' in einem Punkte schneiden, dessen Abstand von C nach denselben Verabredungen $f(b)$ sein wird, auf dieselbe Weise werden wir $f(c)$ als Abstand des Schnittpunktes der Grenzkugel mit der Geraden BB' vom Punkte B haben.

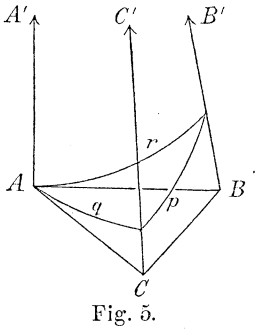

Fig. 5.

Es ist leicht zu sehen,[11]) dass man haben wird:

$$f(b) + f(a) = f(c).$$

In dem Dreieck, dessen Seiten die Grenzkreisbogen p, q, r sind, werden wir haben

$$p = r \sin \Pi(\alpha); \quad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $E^{f(b)}$, so wird kommen

$$p E^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha) E^{f(b)}.$$

Aber

$$p E^{f(b)} = L(a)$$

und folglich

$$L(a) = r \sin \Pi(\alpha) E^{f(b)}.$$

Auf dieselbe Weise hat man

$$L(b) = r \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}.$$

Zu gleicher Zeit ist $q = r \cos \Pi(\alpha)$ oder, was dasselbe ist, $L(b) = r \cos \Pi(\alpha)$. Der Vergleich der beiden Werthe von $L(b)$ giebt die Gleichung

(1) $$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}.$$

[**626**] Setzen wir b' für α und c für β, ohne a zu ändern, was nach dem oben [*Seite 14*] Bewiesenen erlaubt ist, so werden wir erhalten

$$\cos \Pi(b') = \sin \Pi(c) E^{f(a)}$$

oder, da

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) E^{f(a)}.$$

Auf dieselbe Weise muss man haben

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(c) E^{f(b)}.$$

Multipliciren wir die letzte Gleichung mit $E^{f(a)}$ und setzen wir $f(c)$ an Stelle von $f(b) + f(a)$; das wird geben

$$\sin \Pi(a) E^{f(a)} = \sin \Pi(c) E^{f(c)}.$$

Aber da in einem geradlinigen rechtwinkligen Dreieck sich die aufeinander senkrecht stehenden Seiten in der Weise verändern können, dass die Hypotenuse fest bleibt, so können wir in dieser Gleichung $a = 0$ setzen, ohne c zu ändern, und das giebt, indem wir bemerken, dass $f(o) = 0$ und $\Pi(0) = \frac{1}{2}\pi$,

$$1 = \sin \Pi(c)\, E^{f(c)}$$

oder

$$E^{f(c)} = \frac{1}{\sin \Pi(c)}$$

für jede Linie c.

Nehmen wir jetzt die Gleichung (1)

$$\cos \Pi(a) = \sin \Pi(\beta)\, E^{f(a)}$$

und setzen wir darin $1 : \sin \Pi(a)$ an Stelle von $E^{f(a)}$, so wird sie die folgende Form annehmen

$$\cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(\beta)\,. \tag{2}$$

Indem wir hier α, β in b', c umändern, ohne a zu ändern, finden wir

$$\sin \Pi(b) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(c)\,.$$

Die Gleichung (2) giebt, indem man die Buchstaben darin vertauscht,

$$\cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(\alpha)\,.$$

Verändern wir in dieser Gleichung β, b, α in c, α', b', dann wird kommen

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(b)\,. \tag{3}$$

[627] Auf dieselbe Weise werden wir erhalten

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta) = \cos \Pi(a)\,. \tag{4}$$

[*Anwendung auf das rechtwinklige sphärische Dreieck.*] Die Gleichungen (2), (3), (4) beziehen sich auf ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten wir in der Folge mit a, b, c bezeichnen werden, und die den Seiten a, b gegenüberliegenden Winkel mit A, B, $\frac{1}{2}\pi$ sei c gegenüber. In den angeführten Gleichungen können wir a an Stelle von $\Pi(\beta)$, b an Stelle von $\Pi(c)$, c an Stelle von $\Pi(a)$, $\frac{1}{2}\pi - A$ an Stelle

von $\Pi(a)$, B an Stelle von $\Pi(b)$ setzen; auf diese Weise wird aus den angeführten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin A \sin c &= \sin a \\ \cos b \sin A &= \cos B \\ \cos a \cos b &= \cos c\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichungen (5) beziehen sich auf ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck, wie es aus einem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke abgeleitet werden kann, und dessen Seiten in Folge dessen nicht $\frac{1}{2}\pi$ überschreiten können. Fügen wir hinzu, dass, wenn wir durch den Scheitel des Winkels A einen grössten Kreisbogen senkrecht zur Seite b ziehen, dieser Bogen den Bogen a oder seine Verlängerung so schneiden wird, dass jeder der Bogen vom Schnittpunkte bis zu $b = \frac{1}{2}\pi$ sein wird, und der Winkel dieser Bogen b sein wird. Danach ist es nicht schwer zu schliessen, dass in einem sphärischen rechtwinkligen Dreieck, wenn

$c < \frac{\pi}{2}$, man haben muss $a < \frac{\pi}{2}$; $A < \frac{\pi}{2}$,

wenn $c = \frac{\pi}{2}$, » » » $a = \frac{\pi}{2}$; $A = \frac{\pi}{2}$,

endlich wenn $c > \frac{\pi}{2}$, » » » $a > \frac{\pi}{2}$; $A > \frac{\pi}{2}$.

Es folgt daraus, dass, wenn wir annehmen $a > \frac{1}{2}\pi$, man zu gleicher Zeit annehmen muss $c > \frac{1}{2}\pi$; $A > \frac{1}{2}\pi$. Verlängern wir in diesem Falle die Seiten a, c über die Seite b hinaus bis zu ihrem Schnittpunkte, so werden wir ein anderes sphärisches rechtwinkliges Dreieck erhalten, dessen Seiten $\pi - a$, b, $\pi - c$ sein werden mit den gegenüberliegenden Winkeln $\pi - A$, B, $\frac{1}{2}\pi$, d. h. ein Dreieck, auf welches die Gleichungen (5) sich anwenden lassen. Aber die [**628**] Gleichungen (5) ändern ihre Form nicht, wenn man darin $(\pi - a)$ für a, $(\pi - c)$ für c und $\pi - A$ für A einsetzt, was beweist, dass die Gleichungen (5) sich auf jedes rechtwinklige sphärische Dreieck anwenden lassen.

[*Das schiefwinklige sphärische Dreieck.*] Gehen wir zu einem beliebigen sphärischen Dreieck über, dessen Seiten a, b, c mit

den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C sind, ohne anzunehmen, dass einer der Winkel ein rechter ist, weil die Gleichungen (5) gerade für diesen Fall bewiesen sind.

Fällen wir vom Scheitel des Winkels C einen grössten Kreisbogen p senkrecht auf die Seite c. Dabei können die folgenden Fälle eintreten: entweder fällt das Lot p in das Innere des Dreiecks, theilt den Winkel C in zwei Theile D und $C - D$, und die Seite c in zwei Theile, x gegenüber D, und $c - x$ gegenüber $C - D$, oder das Loth fällt ausserhalb des Dreiecks und fügt zum Winkel C einen Winkel D und einen Bogen x zur Seite c.

Im ersten Falle wird das gegebene sphärische Dreieck die Summe von zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken sein. [*Fig. 6.*] Die Seiten des einen dieser Dreiecke werden p, x, a, die gegenüberliegenden Winkel B, D, $\frac{1}{2}\pi$ sein; in dem andern werden die Seiten p, $c - x$, b, die gegenüberliegenden Winkel A, $C - D$, $\frac{1}{2}\pi$ sein. Die Anwendung der Gleichungen (5) auf das erste Dreieck giebt

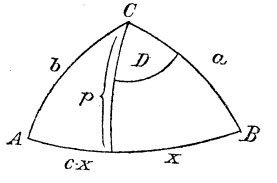

Fig. 6.

$$\sin p = \sin a \sin B$$
$$\sin x = \sin a \sin D$$
$$\text{(A)} \qquad \cos p \sin D = \cos B$$
$$\cos x \sin B = \cos D$$
$$\cos a = \cos p \cos x .$$

Das zweite Dreieck liefert in derselben Weise

$$\sin p = \sin b \sin A$$
$$\sin(c - x) = \sin b \sin(C - D)$$
$$\text{(B)} \qquad \cos p \sin(C - D) = \cos A$$
$$\cos p \cos(c - x) = \cos b .$$

Die Vergleichung der beiden Werthe von $\sin p$ in (A), (B) giebt sodann

$$\text{(6)} \qquad \sin a \sin B = \sin b \sin A .$$

Die letzte Gleichung (B) dividirt durch die letzte der Gleichungen (*A*) giebt

$$\operatorname{tang} x = \frac{\cos b}{\cos a \sin c} - \operatorname{cotg} c ,$$

[629] aber die Zusammensetzung der zweiten, der dritten und der letzten der Gleichungen (A) giebt

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a \cos B .$$

Die Vergleichung dieser beiden Werthe von $\operatorname{tang} x$ führt uns auf die folgende Gleichung

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B . \tag{7}$$

Wenn das Lot p ausserhalb des Dreiecks fällt und den Bogen x zum Bogen c hinzufügt und den Winkel D zum Winkel C, werden sich wieder zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke bilden [*Fig.* 7]. Die Seiten des einen dieser beiden Dreiecke werden p, x, a sein und die gegenüberliegenden Winkel $\pi - B$, D, $\frac{1}{2}\pi$, die Winkel des andern werden sein p, $c + x$, b die gegenüberliegenden Winkel A, $C + D$, $\frac{1}{2}\pi$.

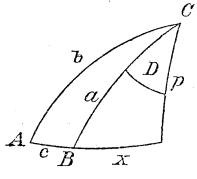

Fig. 7.

Die Anwendung der Gleichungen (5) auf das erste Dreieck giebt

$$\begin{aligned} \sin p &= \sin a \sin B \\ \sin x &= \sin a \sin D \\ -\cos B &= \cos p \sin D \\ \cos D &= \cos x \sin B \\ \cos a &= \cos p \cos x . \end{aligned} \tag{C}$$

Das zweite Dreieck, dessen Seiten p, $c + x$, b sind mit den gegenüberliegenden Winkeln A, $C + D$, $\frac{1}{2}\pi$, liefert auf dieselbe Art

$$\begin{aligned} \sin p &= \sin b \sin A \\ \sin(c + x) &= \sin b \sin(C + D) \\ \cos A &= \cos p \sin(C + D) \\ \cos(C + D) &= \cos(c + x) \sin A \\ \cos b &= \cos p \cos(c + x) . \end{aligned} \tag{D}$$

Die Vergleichung der beiden Werthe von $\sin p$ in (C), (D) giebt von neuem die Gleichung (6); wir folgern aus den Gleichungen (C), (D)

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{cotg} c - \frac{\cos b}{\cos a \sin c}$$

und aus den Gleichungen (C)

$$\operatorname{tang} x = -\operatorname{tang} a \cos B .$$

[630] Die Vergleichung dieser beiden Werthe von $\operatorname{tang} x$ führt uns von neuem auf die Gleichung (7), welche so bewiesen ist (ebenso wie dies oben für die Gleichung (6), geschehen ist) für alle sphärischen Dreiecke im allgemeinen. Die Gleichung (7) giebt durch Vertauschungen der Buchstaben die beiden folgenden

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C .$$

Multiplicirt man die letzte mit $\cos b$, fügt das Product zur ersten und dividirt die Summe durch $\sin b$, so kommt

$$\cos a \sin b = \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C ;$$

indem man darin an Stelle von $\sin c$ seinen Werth

$$\sin c = \frac{\sin C}{\sin A} \sin a$$

entsprechend der Gleichung (6) einsetzt, und sodann durch $\sin a$ dividirt, so kommt

(8) $$\operatorname{cotang} a \sin b = \operatorname{cotang} A \sin C + \cos b \cos C .$$

Ersetzt man hierin $\sin b$ durch seinen Werth

$$\sin a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

und multiplicirt man die Gleichung sodann mit $\sin A$, so kommt:

$$\cos a \sin B = \cos b \cos C \sin A + \sin C \cos A ,$$

woraus wir durch eine Vertauschung der Buchstaben folgern

$$\cos b \sin A = \cos a \cos C \sin B + \sin C \cos B .$$

Die Entfernung von $\cos b$ aus den letzten beiden Gleichungen führt uns auf die folgende Gleichung:

(9) $$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A .$$

Die Gleichungen (6), (7), (8), (9) sind dieselben, welche man gewöhnlich in der sphärischen Trigonometrie giebt, und die man mit Hülfe der gewöhnlichen Geometrie beweist.

[*Gültigkeit der sphärischen Trigonometrie.*] Es folgt aus dem was vorausgeht, dass die sphärische Trigonometrie dieselbe bleibt, ob man nun die Voraussetzung annimmt, dass die Summe der Winkel in jedem geradlinigen Dreiecke [**631**] zwei rechten gleich ist, oder ob man die entgegengesetzte Annahme macht, dass die Summe immer kleiner ist als zwei Rechte; das ist sehr bemerkenswerth und gilt nicht für die ebene Trigonometrie.

[*Berechnung der Function $\Pi(x)$.*] Bevor wir die Gleichungen beweisen, die in der Pangeometrie die Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln jedes geradlinigen Dreiecks ausdrücken, wollen wir für jede Strecke x die Form der Function suchen, die wir bis jetzt mit $\Pi(x)$ ausgedrückt haben. Betrachten wir deshalb [*Fig. 8*] ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$, verlängern wir c über den Scheitel des Winkels $\Pi(\beta)$ hinaus, und machen wir die Verlängerung gleich β. Das Lot, welches auf β am Ende dieser Linie errichtet ist nach der Seite des Scheitelwinkels von $\Pi(\beta)$ hin, wird a und seiner Verlängerung über den Scheitel von $\Pi(\beta)$ hinaus parallel sein. Legen wir noch durch den Scheitel von $\Pi(\alpha)$ eine Gerade, die eben dieser Verlängerung von a parallel ist.

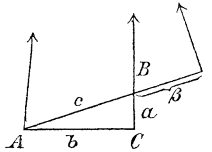

Fig. 8.

Der Winkel, den diese Gerade mit c bilden wird, wird $\Pi(c+\beta)$ sein, und der Winkel, den sie mit b bilden wird, wird $\Pi(b)$ sein, und man wird die Gleichung haben

$$(\Pi) \qquad \Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(\alpha)\,.$$

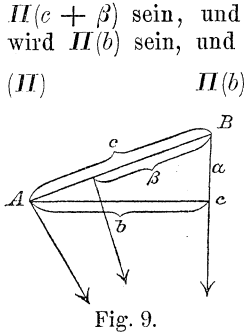

Fig. 9.

Nehmen wir [*Fig. 9*] die Länge β vom Scheitel des Winkels $\Pi(\beta)$ aus, auf der Seite c selbst und errichten auf dem Ende von β ein Lot zu β nach der Seite des Winkels $\Pi(\beta)$ hin, so wird diese Linie parallel sein zur Verlängerung von a über den Scheitel des rechten Winkels hinaus. Ziehen wir durch den Scheitel

des Winkels $\Pi(\alpha)$ eine Gerade, die parallel ist zu der letzten Senkrechten, die folglich auch parallel sein wird zu der zweiten Verlängerung von α. Der Winkel dieser Parallelen mit c wird in allen Fällen $\Pi(c-\beta)$ sein und der Winkel, den sie mit b bildet, wird $\Pi(b)$ sein, folglich

$$(\Pi') \qquad \Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha)\,.$$

Es ist leicht, sich zu überzeugen, dass diese Gleichung wahr ist, nicht nur für $c > \beta$, sondern auch wenn $c = \beta$ und wenn $c < \beta$. In der That, wenn $c = \beta$, so hat man einerseits $\Pi(c-\beta) = \Pi(0) = \frac{1}{2}\pi$, auf der andern Seite wird das auf c im Scheitel von $\Pi(\alpha)$ errichtete Lot parallel zu a, woraus folgt, dass $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ ist, was übereinstimmt mit unserer Gleichung.

Wenn $c < \beta$, so wird das Ende der Linie β über den Scheitel des Winkels $\Pi(\alpha)$ hinausfallen, in eine Entfernung, welche gleich ist $\beta - c$. Das Lot zu β in diesem Ende von β wird parallel zu a und zu der Geraden, die durch den Scheitel des Winkels $\Pi(\alpha)$ parallel [**632**] zu a gezogen ist, woraus folgt, dass die beiden Nebenwinkel, welche diese Parallele mit β bildet, der spitze gleich $\Pi(\beta - c)$, der stumpfe gleich $\Pi(\alpha) + \Pi(b)$ sein werden. Aber die Summe der beiden Nebenwinkel ist immer zwei Rechten gleich; also

$$\Pi(\beta - c) + \Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi$$

oder

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha)\,.$$

Aber nach der Definition der Function $\Pi(x)$ ist

$$\pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)\,,$$

was giebt

$$\Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha)\,,$$

d. h. die oben gefundene Gleichung, welche so für alle Fälle bewiesen ist.

Die Gleichungen (Π), (Π') können durch die beiden folgenden ersetzt werden:

$$\Pi(b) = \tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta) + \tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)$$
$$\Pi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta)\,.$$

Aber die Gleichung (3) giebt uns

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(d)}\,.$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha)$ ihre Werthe, so kommt

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\{\frac{1}{2}\Pi(c+\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\}}{\cos\{\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\}}.$$

Aus dieser Gleichung leiten wir die folgende ab

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

Da die Linien c und β sich unabhängig von einander in jedem geradlinigen rechtwinkligen Dreieck ändern können, so können wir nacheinander in der letzten Gleichung $c = \beta$, $c = 2\beta$ ... $c = n\beta$ setzen, und wir folgern aus den so abgeleiteten Gleichungen, dass im allgemeinen für jede Linie c und für jede positive ganze Zahl n

$$\operatorname{tang}^n\tfrac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(nc).$$

Es ist leicht, die Richtigkeit dieser Gleichung für negatives oder gebrochenes n zu beweisen, woraus folgt, dass, wenn man die Längeneinheit so wählt, dass

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-1}$$

ist, [**633**] wo e die Basis der *Neper*'schen Logarithmen ist, man für jede Linie x hat:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Dieser Ausdruck giebt $\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi$ für $x = 0$ und $\Pi(x) = 0$ für $x = \infty$, $\Pi(x) = \pi$ für $x = -\infty$ übereinstimmend mit dem, was wir oben [*Seite 8*] angenommen und bewiesen haben.

[*Additionstheoreme der trigonometrischen Functionen von* $\Pi(x)$.] Der für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x)$ gefundene Werth giebt für jede Linie x

$$\sin\Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cos\Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

und für zwei willkürliche Strecken (x, y):

$$\sin\Pi(x+y) = \frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1 + \cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}$$

$$\sin\Pi(x-y) = \frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1 - \cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}$$

$$\cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}$$

$$\cos \Pi(x-y) = \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}$$

$$\operatorname{tang} \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)} .$$

[*Das geradlinige rechtwinklige Dreieck.*] Die Gleichungen (2), (3), (4), die wir für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck gefunden haben, beziehen sich auch auf ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ und $\frac{1}{2}\pi$. Ersetzen wir also $\Pi(\alpha)$ durch A, $\Pi(\beta)$ durch B, so werden wir für jedes rechtwinklige Dreieck, wo A der a gegenüberliegende, B der b gegenüberliegende und $\frac{1}{2}\pi$ der c gegenüberliegende Winkel ist, die folgenden Gleichungen erhalten:

$$(10) \qquad \begin{cases} \sin \Pi(a) \cos A = \sin B \\ \cos \Pi(c) \cos A = \cos \Pi(b) \\ \cos \Pi(c) \cos B = \cos \Pi(a) . \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen fügen wir noch folgende Gleichung, die auch oben [*Seite 17*] bewiesen worden ist,

$$(11) \qquad \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) .$$

[**634**] Die erste der Gleichungen (10) kann, indem man darin die Buchstaben unter einander vertauscht, so geschrieben werden

$$\sin \Pi(b) \cos B = \sin A .$$

Setzt man darin den Werth von $\cos B$ ein, der aus der dritten Gleichung (10) entnommen ist, so kommt

$$\sin \Pi(b) \cos \Pi(a) = \sin A \cos \Pi(c) ;$$

und indem wir aus dieser Gleichung mit Hülfe der Gleichung (11) $\sin \Pi(b)$ entfernen, werden wir erhalten

$$(12) \qquad \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) .$$

[*Das geradlinige schiefwinklige Dreieck.*] Seien jetzt a, b, c die Seiten eines beliebigen geradlinigen Dreiecks und A, B, C die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel. Fällen wir vom Scheitel des Winkels C ein Lot p auf die Seite c. Wenn p

in das Innere des Dreiecks fällt, so dass es den Winkel C in zwei Winkel D und $C - D$ zertheilt, und die Seite c in zwei Theile, x gegenüber D und $c - x$ gegenüber $C - D$, so werden zwei rechtwinklige Dreiecke entstehen. Die Seiten des einen dieser Dreiecke werden p, x, b, die gegenüberliegenden Winkel A, D, $\frac{1}{2}\pi$ sein, die Seiten des andern werden sein: p, $c - x$, a, die gegenüberliegenden Winkel B, $C - D$, $\frac{1}{2}\pi$.

Die Anwendung der Gleichung (12) auf das erste dieser Dreiecke giebt

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p) ;$$

aus dem zweiten dieser Dreiecke entnehmen wir auf dieselbe Art

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p),$$

woraus wir schliessen

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b) . \tag{13}$$

Die Anwendung der Gleichungen (10) und (11) auf das erste Dreieck liefert

$$\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x)$$
$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(p) = \sin \Pi(b) ,$$

das zweite Dreieck giebt

$$\sin \Pi(p) \sin \Pi(c - x) = \sin \Pi(a) .$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung an Stelle von $\sin \Pi(c - x)$ seinen Werth, der aus der oben [*Seite 24*] gefundenen allgemeinen Formel für $\sin \Pi(x - y)$ entnommen ist, so kommt

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)} ,$$

[635] woraus wir, indem wir einsetzen

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)}$$
$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(b) \cos A ,$$

die folgende Gleichung ableiten

$$1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} . \tag{14}$$

Die Gleichungen (13) und (14) bestätigen sich von selbst, wenn $A = \frac{1}{2}\pi$ oder das Lot p zusammenfällt mit der Seite b, denn in diesem Falle wird die Gleichung (13) auf die Gleichung (12) zurückgeführt und die Gleichung (14) auf die Gleichung (11), Gleichungen, die für alle geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke bewiesen worden sind. Wenn das Lot p ausserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung von c fällt, und zur Strecke c eine Strecke x hinzugefügt und ein Winkel D zum Winkel C, so bilden sich zwei rechtwinklige Dreiecke, von denen das eine die Seiten p, x, b und die gegenüberliegenden Winkel $(\pi - A)$, D, $\frac{1}{2}\pi$, das andere die Seiten p, $c + x$, a und die gegenüberliegenden Winkel B, $C + D$, $\frac{1}{2}\pi$ hat.

Die Anwendung der Gleichung (12) auf das erste dieser Dreiecke giebt

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p) .$$

Aus dem zweiten Dreieck entnehmen wir auf dieselbe Weise

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p) .$$

Eliminirt man $\operatorname{tang} \Pi(p)$ aus den letzten beiden Gleichungen, so findet man von neuem die Gleichung (13). Die Anwendung der Gleichungen (10), (11) auf das erste Dreieck liefert

$$\begin{aligned} -\cos \Pi(b) \cos A &= \cos \Pi(x) \\ \sin \Pi(b) &= \sin \Pi(x) \sin \Pi(p) ; \end{aligned}$$

aus dem zweiten Dreieck entnehmen wir auf dieselbe Weise

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(p) \sin \Pi(c + x) .$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sin \Pi(c + x)$ durch seinen Werth, der aus der allgemeinen oben [*Seite 24*] für $\sin \Pi(x + y)$ gefundenen Formel entnommen ist, so hat man

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)} .$$

[**636**] Setzt man in diese Gleichung ein

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)} ; \quad \cos \Pi(x) = -\cos \Pi(b) \cos A ,$$

so kommt

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(b)} = \frac{\sin \Pi(c)}{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A} ,$$

eine Gleichung die identisch ist mit Gleichung (14).

Die Gleichungen (13), (14) sind so bewiesen für jedes geradlinige Dreieck.

Die Gleichung (14) giebt durch eine Vertauschung der Buchstaben

$$1 - \cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos B = \frac{\sin\Pi(c)\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung gliedweise mit Gleichung (14), so finden wir

$$1 - \cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos B - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos^2\Pi(c)\cos A\cos B = \sin^2\Pi(c)$$

oder

$$\cos^2\Pi(c) - \cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos B - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos^2\Pi(c)\cos A\cos B = 0.$$

Unterdrücken wir in dieser Gleichung den gemeinsamen Factor $\cos\Pi(c)$, so haben wir

$$\cos\Pi(c) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\cos B - \cos\Pi(a)\cos B - \cos\Pi(b)\cos A = 0.$$

Auf dieselbe Weise finden wir

$$\cos\Pi(a) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos B\cos C - \cos\Pi(b)\cos C - \cos\Pi(c)\cos B = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\cos A$ und ziehen wir das Product ab vom Product der vorigen Gleichung mit $\cos C$, so werden wir haben:

$$\cos\Pi(a)[\cos A + \cos B\cos C] = \cos\Pi(c)[\cos C + \cos A\cos B].$$

Erheben wir die beiden Glieder dieser Gleichung ins Quadrat und dividiren wir danach mit $\cos^2\Pi(c)$, so nimmt sie die folgende Form an

$$\frac{\cos^2\Pi(a)}{\cos^2\Pi(c)}[\cos A + \cos B\cos C]^2 = [\cos C + \cos A\cos B]^2.$$

[637] Aber die Gleichung (13) giebt

$$\frac{1}{\cos^2\Pi(c)} = 1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}\operatorname{tang}^2\Pi(a).$$

Setzen wir in der vorletzten Gleichung an Stelle von $\frac{1}{\cos^2 \Pi(c)}$ seinen durch die letzte gegebenen Werth ein, so kommt

$$\cos^2 \Pi(a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi(a) = \left\{\frac{\cos C + \cos B \cos A}{\cos A + \cos B \cos C}\right\}^2$$

und folglich

$$\sin^2 \Pi(a) \left\{1 - \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}\right\} = \frac{\sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A)}{(\cos A + \cos B \cos C)^2} .$$

Dividiren wir die beiden Glieder dieser Gleichung mit $\sin^2 C - \sin^2 A$ und ziehen wir die Quadratwurzel, so wird kommen

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

ohne Zweideutigkeit des Zeichens, weil die beiden Glieder der letzten Gleichung alle beide positiv sind. In der That ist $\Pi(a) < \frac{1}{2}\pi$, $B < \pi$, $C < \pi$, woraus folgt, dass die Sinus dieser Winkel positiv sind; folglich

$$\cos A + \cos(B + C) = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B + C - A) .$$

Aber $A + B + C < \pi$; folglich wird

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

positiv sein ebenso wie

$$\cos \tfrac{1}{2}(B + C - A) ,$$

indem wir jedem der Glieder der letzten Gleichung die positive Zahl $\sin B \sin C$ hinzufügen, finden wir

$$\cos A + \cos B \cos C > 0 .$$

So ist in jedem geradlinigen Dreieck

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} . \tag{15}$$

Indem man die Gleichung (14) gliedweise mit der folgenden Gleichung multiplicirt, die daraus durch eine Vertauschung der Buchstaben hervorgeht

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(c)} , \tag{16}$$

[**638**] kommt

$$[1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C][1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A] = \sin^2\Pi(b),$$

der man nach Ausführung der im ersten Glied angegebenen Multiplication die folgende Form geben kann:

$$\cos^2\Pi(b) - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A + \cos^2\Pi(b)\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A\cos C = 0,$$

oder indem man mit $\cos\Pi(b)$ dividirt

$$(17)\quad \cos\Pi(b) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\cos C - \cos\Pi(a)\cos C - \cos\Pi(c)\cos A = 0.$$

Aber wir finden nach der Gleichung (13)

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(c)\sin C}{\sin A}\operatorname{cotang}\Pi(a).$$

In diese Gleichung können wir für ein $\Pi(c)$ seinen aus Gleichung (16) entnommenen Werth einsetzen; danach

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(b)\cos\Pi(a)\sin C}{[1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C]\sin A}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes von $\cos\Pi(c)$ in die Gleichung (17) giebt uns

$$(18)\quad \operatorname{cotang} A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}.$$

Vereinigen wir die Gleichungen (13), (14), (15), (18), welche die Abhängigkeit zwischen den Seiten und den Winkeln jedes geradlinigen Dreiecks ausdrücken, um ihre Anwendung zu erleichtern

$$(19)\quad \begin{cases} \sin A\operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B\operatorname{tang}\Pi(b) \\ 1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A = \dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} \\ \cos A + \cos B\cos C = \dfrac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)} \\ \operatorname{cotang} A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen an wird die Pangeometrie eine analytische Geometrie und bildet auf diese Art eine vollständige und deutliche geometrische Theorie. [**639**] Die Gleichungen (19) dienen dazu, die krummen Linien durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ihrer Punkte darzustellen, die Länge und den Flächeninhalt von Curven, die Oberfläche und den Rauminhalt von Körpern zu berechnen, wie ich es gezeigt habe in den wissenschaftlichen Abhandlungen der Universität Kasan für das Jahr 1829.[12])

[*Das unendlich kleine Dreieck.*] Es ist oben bemerkt worden, dass die Pangeometrie die gewöhnliche Geometrie giebt, wenn wir die Linien unendlich klein voraussetzen. Wir können jetzt diese Behauptung bestätigen.

Für jede unendlich kleine Strecke x können wir die folgenden Näherungswerthe annehmen:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotang} \Pi(x) &= x \\ \sin \Pi(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \\ \cos \Pi(x) &= x\,. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Seiten des Dreiecks als unendlich kleine Grössen erster Ordnung und vernachlässigen wir unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung als der zweiten, dann werden die Gleichungen (19) nach Einsetzung der angenäherten Werthe von $\sin \Pi(a)$, $\sin \Pi(b)$ u. s. w. folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} b \sin A &= a \sin B \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ \cos A + \cos(B + C) &= 0 \\ a \sin(A + C) &= b \sin A\,. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen sind die bekannten Gleichungen der gewöhnlichen Trigonometrie. Die beiden letzten geben

$$A + B + C = \pi\,.$$

§ 4. Analytische Geometrie der Ebene.

[*Gleichung des Kreises.*] Nennen wir, um ein Beispiel der Darstellung der krummen Linien durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ihrer Punkte zu geben, y die Länge des Lotes, das von einem Punkte des Umfanges des Kreises vom

Radius r auf einen festen Durchmesser dieses Kreises gefällt ist, und x den Theil dieses Durchmessers zwischen dem Mittelpunkte und dem Fusspunkte des Lotes y. Die Anwendung der Gleichung (11) auf das rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten x, y, r sind, giebt

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r) , \tag{20}$$

[640] was die Gleichung des Kreises in den rechtwinkligen Coordinaten x, y ist. Wenn wir übereinkommen, x von dem einen Ende des Durchmessers aus zu zählen, so wird die Gleichung (20)

$$\sin \Pi(r - x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$$

oder

$$2(e^r + e^{-r}) = (e^{r-x} + e^{-r+x})(e^y + e^{-y}) .$$

[*Gleichung des Grenzkreises.*] Dividiren wir diese Gleichung mit e^r und setzen wir danach $r = \infty$, so erhalten wir die folgende Gleichung, welche die Gleichung des Grenzkreises ist:

$$2 = (e^y + e^{-y}) e^{-x}$$

oder

$$\sin \Pi(y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x) .$$

Es folgt aus der Erklärung des Grenzkreises, dass zwei Axen des Kreises, die durch die beiden Enden einer Sehne gezogen sind, gleich geneigt sind gegen diese Sehne, eine Eigenschaft, die auch als Erklärung des Grenzkreises dienen könnte,[13]) und woraus man auch die Gleichung dieser Curve ableiten kann, indem [*Fig. 10*] man das Dreieck betrachtet, dessen Seiten x, y und die Sehne $2a$ des Grenzkreises sind; die Winkel dieses Dreiecks werden sein $\Pi(a) - \Pi(y)$ gegenüber x, $\Pi(a)$ gegenüber y, und $\frac{1}{2}\pi$ gegenüber $2a$. Uebereinstimmend mit den Gleichungen (10) und (11) hat man in diesem Dreieck

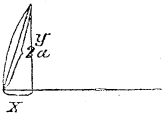

Fig. 10.

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(2a)$$
$$\sin \Pi(x) \cos[\Pi(a) - \Pi(y)] = \sin \Pi(a)$$
$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(a) = \sin [\Pi(a) - \Pi(y)] .$$

Die letzte Gleichung giebt

$$2 \operatorname{tang} \Pi(y) = \operatorname{tang} \Pi(a) \tag{21}$$

und die erste Gleichung kann so geschrieben werden

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{\sin^2 \Pi(a)}{1 + \cos^2 \Pi(a)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von $\sin^2 \Pi(a)$, $1 + \cos^2 \Pi(a)$ ihre Werthe in $\operatorname{tang}^2 \Pi(a)$ und führt man den Werth von $\operatorname{tang}^2 \Pi(a)$ ein, der aus der Gleichung (21) entnommen ist, so kommt

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{2 \operatorname{tang}^2 \Pi(y)}{1 + 2 \operatorname{tang}^2 \Pi(y)}$$

[**641**] und folglich

$$\sin \Pi(x) = \frac{2 \sin \Pi(y)}{1 + \sin^2 \Pi(y)},$$

woraus wir ableiten

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{[1 + \sin \Pi(y)]^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{[1 - \sin \Pi(y)]^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)}.$$

Dividiren wir die letzte Gleichung durch die vorletzte und ziehen wir die Quadratwurzel, so werden wir haben

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{1 - \sin \Pi(y)}{1 + \sin \Pi(y)},$$

woraus

$$\sin \Pi(y) = \frac{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x')}{1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x')}.$$

Das zweite Glied dieser Gleichung kann die folgende Form annehmen:

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} \Pi(x') - \sin \tfrac{1}{2} \Pi(x')}{\cos \tfrac{1}{2} \Pi(x') + \sin \tfrac{1}{2} \Pi(x')}$$

oder

$$\frac{\sin [\tfrac{1}{4} \pi - \tfrac{1}{2} \Pi(x')]}{\cos (\tfrac{1}{4} \pi - \tfrac{1}{2} \Pi(x'))} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} \Pi(x)}{\cos \tfrac{1}{2} \Pi(x)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x)$$

und folglich

$$\sin \Pi(y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x),$$

wie wir weiter oben [*Seite 32*] bewiesen haben.

[*Kreisumfang.*] Um ein Beispiel der Längenmessung von Curven zu geben, suchen wir den Ausdruck der Länge des

Umfanges eines Kreises vom Halbmesser r. Ziehen wir zwei Halbmesser, deren Winkel im Mittelpunkte $2\pi : n$ ist, wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Fällen wir vom Ende eines dieser Halbmesser ein Lot p auf den andern. Das Product pn wird sich um so weniger von der Länge des Kreisumfanges unterscheiden, je grösser n ist. Das rechtwinklige Dreieck, von dem p eine Kathete, r die Hypotenuse und $2\pi : n$ der p gegenüberliegende Winkel ist, giebt (Gleichung 13)

$$\sin\frac{2\pi}{n} = \operatorname{tang}\Pi(p) = \operatorname{tang}\Pi(r)\,.$$

[**642**] Aber es ist bekannt, dass

$$\lim\left\{n \lim\frac{2\pi}{n}\right\} = 2\pi$$

für $n = \infty$, während

$$\frac{1}{n}\operatorname{tang}\Pi(p) = \frac{2}{n(e^p - e^{-p})}$$

und

$$n(e^p - e^{-p}) = 2pn$$

mit um so grösserer Annäherung, je grösser n und je kleiner folglich p ist. Danach [14])

$$\text{Kreisumfang } (r) = np = 2\pi \operatorname{cotg}\Pi(r)\,,$$

das heisst

$$\text{Kreisumfang } (r) = (e^r - e^{-r})\pi\,,$$

was für sehr kleines r giebt

$$\text{Kreisumfang } (r) = 2\pi r\,,$$

wie in der gewöhnlichen Geometrie.

[*Grenzkreisbogen.*] Bestimmen wir noch den Bogen s des Grenzkreises mit Hülfe der Coordinaten: y das von einem Ende des Bogens s auf die durch das andere Ende gezogene Axe gefällte Lot: x der Theil dieser Axe vom Scheitel des Bogens bis zum Fusse des Lotes genommen. Es sei c die Sehne des Bogens s, es seien ebenso $c_1, c_2, c_3 \ldots$ die Sehnen der Bogen $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2^2}s$, $\frac{1}{2^3}s \cdots$. Wir haben weiter oben bewiesen (Gleichung 21), dass

$$\operatorname{cotg}\Pi(y) = 2 \operatorname{cotg}\Pi(\tfrac{1}{2}c)\,.$$

Aehnlich hat man

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c) &= 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_1)\\ \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_1) &= 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_2)\\ \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_2) &= 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_3)\end{aligned}$$

und allgemein für jede positive ganze Zahl n

$$\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_{n-1}) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_n),$$

woraus wir schliessen

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = 2^{n+1} \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_n).$$

[**643**] Wenn n eine sehr grosse Zahl ist und c_n folglich eine sehr kleine Linie, so werden wir haben

$$2^{n+1} \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c_n) = 2^n c_n.$$

Aber

$$2^n c_n = s \quad \text{für } n = \infty,$$

woraus folgt, dass

(22) $$s = \operatorname{cotg} \Pi(y).$$

Bestimmen wir noch den Bogen s des Grenzkreises mit Hülfe des Theiles t der Tangente im Scheitel der durch das Ende des Bogens s gezogenen Axe, der zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte der Tangente mit der durch das andere Ende des Bogens s gezogenen Axe liegt, d. h. bestimmen wir die früher [*Seite 12*] mit $L(t)$ bezeichnete Function. In dem Dreieck, dessen Seiten c, t, $f(t)$ sind mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(t)$, $\pi - \Pi(\frac{1}{2}c)$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\frac{1}{2}c)$, finden wir, indem wir die (Gleichung 13) anwenden,

$$\sin \Pi(t) \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(\tfrac{1}{2}c) \operatorname{tang} \Pi(t).$$

Aber wir haben gesehen, dass Gleichung (21)

$$\operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2}c) = 2 \operatorname{tang} \Pi(y),$$

wozu wir die Bemerkung fügen werden, dass

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2}c)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2}c)},$$

und es kommt

$$\cos \Pi(t) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c)$$

d. h. in Folge der Gleichung (22)

$$\cos \Pi(t) = s = L(t).$$

[*Gleichung der Geraden.*] Die Gleichung der geraden Linie hat eine ziemlich umständliche Form, wenn man will, dass sie allgemein ist und die gerade Linie darstellt, welches auch ihre Lage in Bezug auf das Coordinatensystem sein mag. Fällen wir [*Fig. 11*] von einem festen Punkte der gegebenen Geraden ein Lot a auf die x-Axe und nennen wir L den Winkel, den dieses Lot mit der Geraden bildet. Nennen wir noch y das Lot, welches auf die x-Axe gefällt ist von einem anderen Punkte der gegebenen Geraden, dessen [**644**] Abstand vom ersten Punkte l ist; sei endlich x der zwischen den beiden Loten gelegene Theil der x-Axe. Ziehen wir eine gerade Linie durch das Ende von a und den Fusspunkt von y und sei r die Länge des Theiles der Geraden, welche zwischen diesen beiden Punkten liegt. Es werden zwei Dreiecke entstehen, ein rechtwinkliges, mit den Seiten a, x, r und den gegenüberliegenden Winkeln, A, X, $\frac{1}{2}\pi$, das andere mit den Seiten y, r, l und den gegenüberliegenden Winkeln $L - X$, C, $\frac{1}{2}\pi - A$.

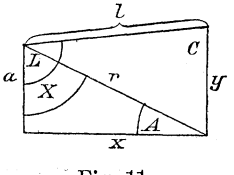

Fig. 11.

Die Anwendung der Gleichungen (10), (11) auf das erste dieser Dreiecke giebt:

$$\begin{aligned}
\sin \Pi(x) \sin \Pi(a) &= \sin \Pi(r) \\
\sin \Pi(x) \cos X &= \sin A \\
\sin \Pi(a) \cos A &= \sin X \\
\cos \Pi(r) \cos A &= \cos \Pi(x) \\
\cos \Pi(r) \cos X &= \Pi(a) .
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen entnehmen wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} A &= \operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a) \\
\operatorname{tang} \Pi(r) &= \operatorname{tang} \Pi(x) \sin \Pi(a) \cos A \\
\operatorname{tang} X &= \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x) \\
\cos \Pi(x) &= \cos \Pi(r) \cos A \\
\sin X &= \sin \Pi(a) \cos A .
\end{aligned}$$

Die Anwendung der letzten der Gleichungen (19) auf das zweite Dreieck liefert:

$$\operatorname{cotg}(L - X)\cos A \sin \Pi(r) + \sin A = \frac{\cos \Pi(r)}{\cos \Pi(y)},$$

woraus folgt, dass

$$\cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(r)}{\operatorname{cotg}(L - X)\cos A \sin \Pi(r) + \sin A}$$
$$= \frac{\cos \Pi(r)\,[\operatorname{tang} L - \operatorname{tang} X]}{[1 + \operatorname{tg} L \operatorname{tg} X]\cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) + \sin A\,[\operatorname{tg} L - \operatorname{tg} X]};$$

indem man in diese Gleichung an Stelle von $\operatorname{tang} X$ seinen Werth einsetzt, kommt

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(r)\,[\operatorname{tang} L - \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x)]:$$
$$\{[1 + \operatorname{tg} L \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(x)] \cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x)$$
$$+ \sin A\,[\operatorname{tg} L - \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(x)]\}.$$

[**645**] Setzen wir in diese Gleichung an Stelle von $\cos \Pi(r)$ seinen Werth ein, so finden wir, nachdem alle Vereinfachungen vorgenommen sind, [15]) dass

$$(23) \quad \cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(a)}{\sin \Pi(x)} - \sin \Pi(a) \operatorname{cotg} \Pi(x) \operatorname{cotg} L.$$

[*Parallele zur x-Axe.*] Wenn die gegebene Gerade der x-Axe parallel ist, hat man $L = \Pi(a)$ und die Gleichung (23) wird die folgende Form annehmen:

$$\cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(a)}{\sin \Pi(x)} - \frac{\cos \Pi(a)}{\operatorname{tang} \Pi(x)}$$

oder

$$(24) \quad \cos \Pi(y) = \cos \Pi(a)\, e^{-x}.$$

Bezeichnen wir mit s, s' die Längen der beiden Grenzkreisbogen zwischen der x-Axe und der zu dieser Axe parallelen Geraden, von denen der erste a im Fusspunkte von a berührt und der zweite y im Fusspunkte von y berührt, so werden wir nach dem, was bewiesen [*Seite 35*] ist, erhalten

$$s = \cos \Pi(a)$$
$$s' = \cos \Pi(y),$$

danach

$$s' = s e^{-x},$$

wo x der Abstand zwischen den beiden Bogen s und s' ist.

Diese Gleichung zeigt, dass die Constante E, die wir weiter oben [*Seite 11*] eingeführt haben, um die constante Beziehung von zwei Grenzkreisbogen zwischen zwei Parallelen zu bezeichnen, deren Abstand der Einheit gleich ist, gleich e ist, d. h. gleich der Basis der *Neper*'schen Logarithmen.

Setzen wir in der Gleichung (23) $a = 0$ und setzen $\pi - L$ an Stelle von L, so werden wir haben

$$\cos \Pi(y) = \operatorname{cotg} \Pi(x) \operatorname{cotg} L ,$$

was folglich die Gleichung einer Geraden ist, die durch den Coordinatenanfang geht, und einen Winkel L mit der x-Axe bildet, was mit der Gleichung (10) übereinstimmt.

[*Das geradlinige Viereck mit drei rechten Winkeln.*] Betrachten wir jetzt [*Fig. 12*] ein Viereck, von dem zwei Seiten a, y senkrecht auf der dritten Seite x stehen.

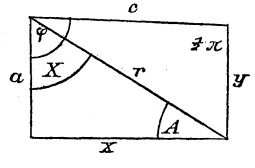

Fig. 12.

Sei c die vierte Seite und φ der Winkel zwischen a und c, während der Winkel zwischen c und y ein rechter ist. Ziehen wir die Diagonale r, die durch den Scheitel des Winkels φ geht und durch den Scheitel des gegenüberliegenden rechten Winkels. Diese Diagonale theilt das Viereck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Seiten von einem [**646**] dieser beiden Dreiecke sind a, x, r und die gegenüberliegenden Winkel A, X, $\frac{1}{2}\pi$; die Seiten des anderen sind y, c, r und die gegenüberliegenden Winkel $\varphi - X$, $\frac{1}{2}\pi - A$, $\frac{1}{2}\pi$.

Die Anwendung der Gleichungen (10), (11), (13) auf das erste dieser Dreiecke giebt

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) \\ \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin X \operatorname{tang} \Pi(x) \\ \cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x) \\ \cos \Pi(r) \cos X = \cos \Pi(a) . \end{cases}$$

Das zweite Dreieck giebt auf dieselbe Art die folgenden Gleichungen:

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \sin \Pi(y) \sin \Pi(c) = \sin \Pi(r) \\ \sin \Pi(y) \cos(\varphi - X) = \cos A \\ \cos \Pi(r) \cos(\varphi - X) = \cos \Pi(c) \\ \cos \Pi(r) \sin A = \cos \Pi(y) . \end{cases}$$

Die Gleichung (12) angewendet auf das erste Dreieck giebt

$$\text{(K)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \Pi(r) = \sin X \operatorname{tang} \Pi(x) \\ \operatorname{tang} \Pi(r) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) , \end{cases}$$

während die Anwendung derselben Gleichungen auf das zweite Dreieck liefert

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \Pi(r) = \sin(\varphi - X) \operatorname{tang} \Pi(y) \\ \operatorname{tang} \Pi(r) = \cos A \operatorname{tang} \Pi(c) . \end{cases}$$

Setzt man in der zweiten der Gleichungen (K) für $\sin \Pi(r)$ seinen aus den Gleichungen (G) entnommenen Werth ein, so finden wir

$$\cos \Pi(r) = \frac{\sin \Pi(x) \cos \Pi(a)}{\sin A} .$$

Die Einsetzung dieses Werthes von $\cos \Pi(r)$ in die letzte der Gleichungen (H) giebt

$$\text{(25)} \qquad \cos \Pi(y) = \sin \Pi(x) \cos \Pi(a) .$$

Dividirt man gliedweise die letzte der Gleichungen (H) durch die dritte der Gleichungen (G), so kommt

$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(x)} ;$$

[**647**] setzen wir in diese Gleichung den Werth, den wir soeben für $\cos \Pi(y)$ gefunden haben, an Stelle von $\cos \Pi(y)$ ein, so werden wir erhalten

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a) .$$

Dividirt man die zweite der Gleichungen (G) gliedweise durch die letzte dieser Gleichungen, so kommt

$$\frac{\operatorname{tang} \Pi \operatorname{tang} \Pi(x)}{\cos \Pi(r)} = \frac{\sin A \operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(a)} .$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von $\sin A$ seinen aus der letzten der Gleichungen (H) entnommenen Werth ein, so findet man:

$$\operatorname{tang} X = \frac{\cos \Pi(y) \operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(a)} \operatorname{cotg} \Pi(x) .$$

Ersetzt man endlich in dieser letzten Gleichung $\cos \Pi(y)$ durch seinen weiter oben [*Gleichung 25*] gefundenen Werth, so kommt

$$\operatorname{tang} X = \cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(a) .$$

Die Zusammenstellung der zweiten der Gleichungen (H) mit der ersten der Gleichungen (L) giebt noch

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) \frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\sin \Pi(y)} = \frac{\operatorname{tang} \Pi(r)}{\cos A}$$

oder

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \frac{\cos \Pi(y) \operatorname{tang} \Pi(r)}{\cos A} ,$$

und wenn wir den durch die zweite der Gleichungen (K) gegebenen Werth von $\operatorname{tang} \Pi(r)$ einsetzen

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(y) .$$

Diese Gleichung nimmt, wenn man darin an Stelle von $\operatorname{tang} A$, $\operatorname{tang} X$ ihre weiter oben gefundenen Werthe einsetzt, die folgende Form an:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(x)} . \tag{26}$$

Diese Gleichung zeigt, dass x immer reell ist, wenn der Winkel φ grösser ist als $\Pi(a)$ und kleiner als ein rechter, oder wenn $\pi - \varphi > \Pi(a)$, $\pi - \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

[**648**] Der Werth von $\cos \Pi(x)$ ist positiv, wenn $\frac{1}{2}\pi > \varphi > \Pi(a)$ und die Strecke x ist folglich auch positiv; wenn aber $\frac{1}{2}\pi > \pi - \varphi > \Pi(a)$, so wird der Werth von $\cos \Pi(x)$ negativ, und die Linie x ist auf der andern Seite des Lotes a gelegen.

[*Das gemeinsame Lot von zwei Geraden.*] Dies beweist, dass, wenn zwei Gerade, die in derselben Ebene gelegen sind, einander nicht treffen, soweit man sie auch verlängert (ohne parallel zu sein), alle beide zu einer und derselben Geraden senkrecht sein müssen;[16]) alle Paare von Geraden, die in derselben Ebene sind, und weder parallel noch senkrecht zu einer und derselben Geraden, müssen sich nothwendig schneiden. Die Geraden, die in derselben Ebene gelegen sich nothwendig schneiden nach hinreichender Verlängerung, werden also nur diejenigen sein, für welche in jedem Punkte der Winkel, den die durch diesen Punkt gehende Gerade mit dem von diesem Punkte auf die andere Gerade gefällten Lote bildet, kleiner

ist als der Parallelwinkel, welcher diesem Lote entspricht. Mit Hülfe der vorausgehenden Resultate ist es möglich, die allgemeine Gleichung (23) der geraden Linie sehr zu vereinfachen in dem Falle, wo die Gerade, zu der die Gleichung gehört, die x-Axe nicht schneidet.

[*Neue Form der Gleichung der Geraden.*] Es sei a das auf die x-Axe von einem festen, aber willkürlich auf der gegebenen Geraden angenommenen Punkte aus gefällte Lot, L derjenige der beiden Winkel zwischen diesem Lot und der Geraden, welcher nach der Seite der positiven x gelegen ist. Suchen wir zuerst eine Strecke l, so dass

$$\cos \Pi(l) = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{cotg} L ,$$

was immer möglich ist, so lange als $L > \Pi(a)$, d. h. so lange die Gerade die x-Axe nicht schneidet. Tragen wir diese Linie auf der x-Axe vom Coordinatenanfang aus nach der Seite der positiven oder negativen x ab, je nach dem Zeichen von l. Errichten wir im Ende der Strecke l ein Lot auf der x-Axe, verlängern wir es, bis es die gegebene Linie trifft, und sei b der Theil dieses Lotes, der zwischen der gegebenen Geraden und der x-Axe liegt. Der Winkel, unter dem dieses Lot die gegebene Gerade treffen wird, muss ein rechter sein, nach Gleichung (26). Kommen wir jetzt überein, den Fusspunkt des Lotes b zum Coordinatenanfang zu nehmen, so werden wir nach Gleichung (25) haben

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) , \tag{27}$$

was die allgemeine Gleichung einer Geraden ist, die die x-Axe nicht schneidet. Wir können in dieser Gleichung $y = a$ und zu gleicher Zeit $x = -l$ setzen, was giebt

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(l) ;$$

[**649**] diese Gleichung nimmt, wenn man an Stelle von $\cos \Pi(b)$, $\sin \Pi(l)$ ihre Werthe einsetzt, die folgende Form an

$$\cos \Pi(y) \sin \Pi(x) = \cos \Pi(a) \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \Pi(a) \operatorname{cotg}^2 L} .$$

Das zweite Glied dieser Gleichung wird imaginär, sowie

$$\operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{cotg} L > 1 ,$$

d. h. für jede Gerade, welche die x-Axe schneidet.

§ 5. Abstandsmessungen.

[*Abstand von zwei Punkten.*] Mit Hülfe des Vorangehenden können wir die Aufgabe lösen, den Abstand von zwei Punkten zu finden, deren Lage in der Ebene durch ihre rechtwinkligen Coordinaten x, y und x', y' bestimmt ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\Delta x = x' - x\,, \quad \Delta y = y' - y\,.$$

Fällen wir [*Fig. 13*] ein Lot vom Ende von y auf y', und bezeichnen wir die Länge dieses Lotes mit q, während y_1 den Theil von y' zwischen der x-Axe und dem Lote q bezeichnet.

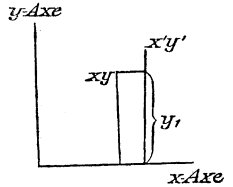

Fig. 13.

In Folge der Gleichungen (25) werden wir haben

$$\cos\Pi(y_1) = \cos\Pi(y)\sin\Pi(\Delta x)$$
$$\cos\Pi(\Delta x) = \cos\Pi(q)\sin\Pi(y)\,.^{17})$$

Nachdem man die Werthe von y und q mit Hülfe dieser Gleichungen bestimmt hat, wird der gesuchte Abstand der beiden Punkte, den wir mit r bezeichnen, durch die folgende Gleichung gegeben sein, die man aus der Gleichung (11) entnimmt

$$\sin\Pi(r) = \sin\Pi(y' - y_1)\sin\Pi(q)\,.$$

[*Bogenelement.*] Wenn Δx und Δy und folglich q, r sehr klein sind, so dass man die höheren Potenzen dieser Grössen gegen die niederen vernachlässigen kann, so wird r das Linienelement ds einer Curve darstellen, zu dessen Ausdruck man gelangt, indem man nimmt

$$\sin\Pi(q) = 1 - \tfrac{1}{2}q^2$$
$$\cos\Pi(q) = q - \tfrac{1}{3}q^3$$
$$\sin\Pi(r) = 1 - \tfrac{1}{2}r^2$$
$$\sin\Pi(y' - y_1) = 1 - \tfrac{1}{2}(y' - y_1)^2\,,$$

wonach kommt

$$q = \frac{\Delta x}{\sin\Pi(y)}$$

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2\Pi(y)}}\,.$$

[**650**] Für den Grenzkreis hat man

$$\sin \Pi(y) = e^{-x}.$$

[*Grenzkreisbogen.*] Aus den allgemeinen Ausdrücken, die $\sin \Pi(a)$ u. s. w. als Function von a ausdrücken, und die weiter oben [*Seite 24*] gegeben worden sind, entnimmt man

$$d\Pi(a) = -\sin \Pi(a)\, da,$$

woraus man durch Differentiation der Gleichung des Grenzkreises findet

$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(y)\, dy = e^{-x}\, dx$$

und

$$ds = \frac{dx\, e^{x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}};$$

indem man integrirt in Bezug auf x von $x = 0$ an, findet man

$$s = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

oder anders

$$s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

wie wir es weiter oben [*Seite 35, Gleichung 22*] gefunden haben.

[*Polarcoordinaten.*] Bezeichnen wir mit r den Abstand eines Punktes einer gekrümmten Linie vom Coordinatenanfang und mit φ den Winkel, den dieser Abstand r mit der positiven x-Axe bildet, so werden wir in dem Dreieck, dessen Seiten y, x, r sind, nach Gleichung (12) haben

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \sin \varphi \operatorname{tang} \Pi(y).$$

Nimmt man die Logarithmen der beiden Seiten dieser Gleichung und differenzirt in Bezug auf y, φ, r, so kommt

$$\frac{dr}{\cos \Pi(r)} = -\operatorname{cotg} \varphi\, d\varphi + \frac{dy}{\cos \Pi(y)}.$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir

$$dy = \left\{ \operatorname{cotg} \varphi\, d\varphi + \frac{dr}{\cos \Pi(r)} \right\} \cos \Pi(y)$$

oder, indem wir an Stelle von $\cos \Pi(y)$ seinen Werth in r und φ einsetzen

$$dy = \frac{\cos \varphi \cos \Pi(r)\, d\varphi + \sin \varphi\, dr}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Pi(r)}}.$$

Um dx in r und φ auszudrücken, nehmen wir (Gleichung 10)

$$\cos\Pi(r)\cos\varphi = \cos\Pi(x)\,.$$

[**651**] [*Bogenelement in Polarcoordinaten.*] Die Differentiation in Bezug auf r, φ und x der Logarithmen der beiden Seiten dieser Gleichung liefert

$$\frac{\sin^2\Pi(r)}{\cos\Pi(r)}\,dr - \operatorname{tang}\varphi\,dy = \frac{\sin^2\Pi(x)}{\cos\Pi(x)}\,dx\,,$$

woraus wir mit Hülfe der Gleichungen

$$\sin\Pi(x)\sin\Pi(y) = \sin\Pi(r)$$
$$\cos\Pi(r)\cos\varphi = \cos\Pi(x)\,,$$

die folgende Gleichung entnehmen, die den gesuchten Werth ausdrückt

$$\frac{dx}{\sin\Pi(y)} = \frac{\cos\varphi\sin\Pi(r)\,dr - d\varphi\sin\varphi\operatorname{cotg}\Pi(r)}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\Pi(r)}}\,,$$

wonach

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2\operatorname{cotg}^2\Pi(r)}\,.$$

[*Kreisumfang.*] Wir finden für den Kreis, indem wir annehmen, dass der Coordinatenanfang im Mittelpunkte ist (da $dr = 0$)

$$ds = d\varphi\operatorname{cotg}\Pi(r)\,;$$

indem man integrirt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und das Resultat mit 4 multiplicirt, finden wir den folgenden Ausdruck für den Umfang des Kreises vom Radius r

$$2\pi\operatorname{cotg}\Pi(r)\,,$$

welches mit dem zusammenfällt, den wir weiter oben [*Seite 34*] gefunden haben.

[*Kreismessung auf der Grenzkugel.*] Nennen wir s den Bogen eines Grenzkreises, der von der x-Axe an gerechnet ist, so wird die Drehung von s um die x-Axe einen Theil der Grenzkugel erzeugen, und das Ende dieses Bogens wird einen Kreisumfang beschreiben, der auf der Grenzkugel in derselben Weise bestimmt wird, wie der Kreis vom Radius r in der gewöhnlichen Geometrie bestimmt wird, woraus folgt, dass der Umfang gleich $2\pi s$ sein muss. Auf der andern Seite wird der Umfang desselben Kreises, wenn man ihn in seiner Ebene

betrachtet, wo das Lot y, welches von dem einen Ende des Bogens s auf die Axe des Grenzkreises gefällt ist, die als x-Axe dient und durch das andere Ende geht, sein Halbmesser ist, in der Pangeometrie gegeben durch die Formel

$$2\pi \cot \Pi(y),$$

woraus folgt, dass

$$s = \cot \Pi(y),$$

[**652**] wie es zuvor [*Seite 35*] bewiesen worden ist.

§ 6. Flächenmessungen.

[*Flächenelement.*] Um das Flächenelement zu finden, theilen wir die Ebene durch Grenzkreise, die alle zur Axe die x-Axe haben, so dass der Abstand jedes Grenzkreises von dem folgenden unendlich klein ist und durch dx ausgedrückt werden kann. Es sei s der Bogen eines dieser Grenzkreise zwischen der x-Axe und einem Punkte einer gegebenen Curve, dessen Coordinaten x, y seien. Sei noch s' der Bogen eines andern dieser Grenzkreise zwischen der x-Axe und einem Punkte der gegebenen Curve, bestimmt durch die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$.

Der unendlich kleine Theil der Ebene zwischen s und s' einerseits und zwischen der Curve und der x-Axe andrerseits hat [*vgl. Seite 12*] zum Ausdruck

$$dS = \frac{e^s\, dx}{e - 1}$$

oder, indem man einsetzt $s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$

$$dS = \frac{e\, dx \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e - 1}.$$

[*Grenzkreissector.*] Als Beispiel bestimmen wir die Fläche eines Grenzkreises, für den wir die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten gefunden haben [*vgl. Seite 33*]

$$\sin \Pi(y) = e^{-x}$$

mit deren Hülfe wir den folgenden Ausdruck für das Differential der gesuchten Fläche finden

$$dS = \frac{e}{e - 1}\, dy \cos \Pi(y) \operatorname{cotg} \Pi(y).$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $y = 0$ an, so finden wir für die Fläche, die zwischen dem Bogen des Grenzkreises, der x-Axe und der Ordinate y enthalten ist

$$s = \frac{e}{e-1}\{\operatorname{cotg} \Pi(y) - \tfrac{1}{2}\pi + \Pi(y)\}.$$

Wir haben gesehen, dass der Theil einer Ebene, der zwischen zwei unbegrenzt verlängerten Parallelen nach der Seite des Parallelismus hin enthalten ist und begrenzt wird von einem Bogen s eines Grenzkreises, dem die beiden Parallelen als Axen dienen, zum Ausdruck hat

$$\frac{es}{e-1} = \frac{e \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e-1}.$$

[*Parallelstreifen.*] Danach finden wir für die Fläche, die zwischen zwei parallelen Geraden enthalten ist (in denen die eine senkrecht zu y ist), die durch die beiden Enden von y gezogen sind [**653**] und nach der Seite des Parallelismus unbegrenzt verlängert sind, die Formel

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(y).$$

Mit Hülfe dieser Formel können wir den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks als Function der Winkel dieses Dreiecks bestimmen. Seien dazu die Seiten des Dreiecks a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$; verlängern wir [*vgl. Fig. 8, Seite 22*] die Hypotenuse c über den Scheitel des Winkels $\Pi(\beta)$ hinaus und machen wir die Verlängerung gleich β. Das auf β im Ende von β errichtete Lot wird parallel sein zur Verlängerung der Seite a, und der Inhalt des Theiles der Ebene, welcher zwischen diesen beiden nach der Seite des Parallelismus hin unbegrenzt verlängerten Parallelen enthalten ist, und auf der andern Seite durch die Linie β begrenzt wird, hat den Werth

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\beta).$$

[*Dreiecksinhalt.*] Ziehen wir jetzt durch den Scheitel des Winkels A eine Parallele zum Lot, die folglich gegen c unter dem Winkel $\Pi(c+\beta)$ geneigt ist und auch parallel sein wird zur Verlängerung von a, so wird der Werth des Theiles der Ebene zwischen $c+\beta$ und den beiden nach der Seite des Parallelismus hin ins Unendliche verlängerten Parallelen sein

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c+\beta).$$

In derselben Weise ist der Theil der Ebene zwischen b, der durch den Scheitel von A gezogenen Geraden und der Seite a mit ihrer Verlängerung

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) .$$

Demnach wird die Summe von $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\beta)$ und von $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ vermindert um $\frac{1}{2}\pi - \Pi(c+\beta)$ der Ausdruck des Flächeninhalts des Dreiecks sein, welcher also den Werth haben wird

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) - \Pi(\beta) + \Pi(c+\beta) .$$

Wir haben aber bewiesen [*Seite 22, Gleichung II*), dass

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta) .$$

Setzt man in den Ausdruck der Fläche des geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks diesen Werth an Stelle von $\Pi(b)$ ein, so nimmt der Ausdruck dieser Fläche die folgende Form an

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta) ,$$

[**654**] d. h., dass die Fläche eines geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks gleich ist dem Unterschiede zwischen zwei rechten Winkeln und der Summe der drei Winkel des Dreiecks; woraus noch folgt, dass die Fläche jedes geradlinigen Dreiecks dem Ueberschuss von zwei rechten Winkeln über die Summe der drei Winkel des Dreiecks gleich ist. Das folgt daraus, dass die Fläche jedes geradlinigen Dreiecks die Summe der Flächen zweier geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke ist.

[*Inhalt des geradlinigen Polygons.*] Es folgt aus dem Vorausgehenden, dass der Flächeninhalt jedes Vierecks gleich dem Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die Summe der vier Winkel des Vierecks, und im allgemeinen, dass die Fläche jedes Vielecks von n Seiten dem Ueberschuss von $(n-2)\pi$ über die Summe der Winkel des Vierecks ist.

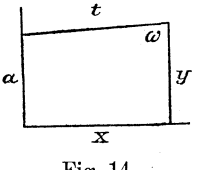

Fig. 14.

Betrachten wir im Besondern [*Fig. 14*] ein Viereck, dessen zwei Seiten a, y alle beide auf der dritten Seite x senkrecht stehen, und dessen vierte Seite t auf der Seite a senkrecht steht und mit y einen Winkel bildet, den wir mit ω bezeichnen.

[*Anwendung auf Integrale.*] Wir haben weiter oben bewiesen (Gleichung 25), dass zwischen den Bestandtheilen eines solchen Vierecks die folgende Gleichung besteht

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) .$$

Betrachten wir x, y als Veränderliche, und a als Constante, so drückt sich die Fläche dieses Vierecks, wie jede ebene Fläche, nach dem was oben bewiesen ist, aus durch das Integral [18])

$$\int dx \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

das, angewendet auf den Fall, der uns beschäftigt, wenn man den Werth von $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ einsetzt, den folgenden Werth für die Fläche giebt

$$\int_0 \frac{dx \cos \Pi(a)}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}},$$

während diese selbe Fläche, zu Folge des Satzes, der die Fläche jedes ebenen Vielecks als Function der Winkel ausdrückt,

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \omega$$

ist; das giebt

$$\text{(M)} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \omega = \cos \Pi(a) \int_0 \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}} .$$

Der Winkel ω, den die Seite t mit der Seite y bildet, ist durch die folgende Gleichung gegeben (Gleichung 26)

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\cos \Pi(x)} ;$$

[**655**] wir schreiben in der Gleichung (M) α an Stelle von $\Pi(a)$ und ξ an Stelle von $\Pi(x)$, so wird sie [19])

$$\frac{\frac{1}{2}\pi - \omega}{\cos \alpha} = \int_{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sin \xi \sqrt{\sin \alpha^2 - \cos^2 \xi}}$$

wo α eine constante Grösse ist.

Die Richtigkeit des für dieses Integral gefundenen Werthes kann bestätigt werden durch Differentiation. [20])

[*Angenäherte Integration.*] Die Pangeometrie zeigt so eine Methode an, die angenäherten Werthe von bestimmten Integralen zu finden.

Es sei gegeben das Integral

$$\int A \, dx ,$$

wo A eine gegebene Function von x ist; um den Werth dieses Integrals zu berechnen, muss man $A = \operatorname{cotg} \Pi(y)$ setzen und die Werthe y', y'', y''' u. s. w. bestimmen, die den Werthen x', x'', x''' u. s. w. entsprechen, welche willkürlich als Integrationsgrenzen genommen sind; dann muss man die Längen der Sehnen berechnen, die die Endpunkte von y' und y'', von y'' und y''' u. s. w. verbinden, und die Winkel, welche jede Sehne mit der Verlängerung der folgenden Sehne bildet. Die Summe dieser Winkel wird den angenäherten Werth des Integrals geben.

[*Flächenelement in Parallelcoordinaten ausgedrückt.*] Der Flächeninhalt des Theiles der Ebene, der zwischen einer gegebenen Geraden und zwei unter einander parallelen Geraden enthalten ist, die durch die beiden Enden der gegebenen Linie gezogen sind und nach der Seite des Parallelismus unbegrenzt verlängert sind, wird gleich π sein, vermindert um die Summe der zwei Winkel, welche die beiden Parallelen mit der gegebenen Geraden bilden, weil die Figur als ein Dreieck mit einem Winkel Null betrachtet werden kann.

Die Fläche einer ebenen Curve kann in Elemente getheilt werden durch Gerade, die alle einer gegebenen Geraden, z. B. der y-Axe, parallel sind. Ziehen wir [*Fig. 15*] durch das Ende der Abscisse x eine Gerade, die parallel ist zur y-Axe, so wird diese Gerade mit der x-Axe einen Winkel $= \Pi(x)$ bilden, die durch das Ende der Abscisse $x + dx$ gezogene Gerade wird ebenso mit der x-Axe einen Winkel gleich $\Pi(x + dx)$ bilden, woraus folgt, dass die Fläche des Theiles der Ebene, der zwischen dx und diesen beiden Parallelen enthalten ist, gleich $d\Pi(x)$ sein wird. Sei jetzt u die Länge des Theiles der ersten Parallelen, welcher zwischen der x-Axe und der Curve enthalten ist, so wird der zwischen den beiden Parallelen und ausserhalb der gegebenen Curve gelegene Flächentheil nach dem, was weiter oben [*Seite 11 und Seite 46*] bewiesen worden ist, gleich

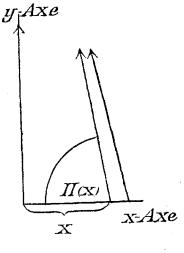

Fig. 15.

$$-e^{-u}\, d\Pi(x),$$

[**656**] woraus folgt, dass der Theil dieser Fläche, der zwischen der Curve und der x-Axe gelegen ist, das heisst das Flächenelement dieser Curve, den Ausdruck besitzt:

$$dS = -(1 - e^{-u})\, d\Pi(x).$$

[*Kreisinhalt.*] Um die Fläche des Kreises vom Radius r zu berechnen, muss man in den allgemeinen Ausdruck des Flächenelements einer Curve, der oben gefunden ist [*vgl. Anmerkung 18*] und so lautete:

$$dS = dx \cot \Pi(y),$$

den Werth von $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ einsetzen, welcher aus der Gleichung des Kreises entnommen ist,

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r),$$

wo der Coordinatenanfang im Mittelpunkte des Kreises ist, das giebt

$$dS = dx \sqrt{\frac{\sin^2 \Pi(x)}{\sin^2 \Pi(r)} - 1};$$

integriren wir von $x = 0$ an, so finden wir

$$S = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(r)}\right) - \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\operatorname{cotg} \Pi(x)}{\operatorname{cotg} \Pi(r)}\right).$$

Für $x = r$ giebt dies als Fläche des Kreisquadranten

$$\frac{\pi}{2 \sin \Pi(r)} - \tfrac{1}{2}\pi;$$

multipliciren wir mit 4, so finden wir für die Fläche des Kreises

$$2\pi\left\{\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1\right\} = \pi(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2.$$

Wenn r ausserordentlich klein ist, dann giebt dieser Ausdruck die Fläche des Kreises $= \pi r^2$, was derselbe Ausdruck ist, den die gewöhnliche Geometrie für den Flächeninhalt des Kreises giebt.

Der vorausgehende Ausdruck für die Fläche des Kreises erlaubt uns, dem Flächenelemente jeder gekrümmten Linie die folgende Form zu geben:

$$dS = d\varphi\left\{\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1\right\},$$

wo r der vom Coordinatenanfang zu einem Punkte der Curve gezogene Leitstrahl ist und φ der Winkel, den dieser Leitstrahl mit einer festen Geraden bildet, die durch den Coordinatenanfang geht.

[**657**] [*Dreiecksinhalt.*] Die Anwendung dieser Formel auf die Bestimmung der Fläche eines geradlinigen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c mit den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C sind, giebt, wenn wir die Winkel A, C und die Seiten b, a als Variable betrachten, für die Fläche des Dreiecks:

$$\int_0^A dA \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} - 1 \right\}.$$

Die Seite wird ausgedrückt als Function von c, A und B mit Hülfe der letzten der Gleichungen (19)

$$\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b)}.$$

Entnehmen wir aus dieser Gleichung den Werth von $\sin \Pi(b)$ und setzen ihn in den Ausdruck für die Fläche des Dreiecks ein, so wird für die Fläche des Dreiecks kommen

$$= S = \int_0^A \frac{dA}{\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 \Pi(c)}{(\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(r) + \cos A)^2}}} - A.$$

Aber es war bewiesen [*Seite 47*], dass die Fläche des Dreiecks

$$= \pi - A - B - C$$

ist, wo A und B gegebene Winkel sind, und C nach Gleichung (19) gegeben ist:

$$\cos C + \cos A \cos B = \frac{\sin A \sin B}{\sin \Pi(c)}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke für die Fläche des Dreiecks giebt sodann

$$\pi - B - C = \int_0^A \frac{dA[\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A]}{\sqrt{(\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A)^2 - \cos^2 \Pi(c)}}.$$

Wenn $B = \frac{1}{2}\pi$, giebt diese Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\pi - C = \int_0^A \frac{\cos A \, dA}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi(c)}}$$

eine Gleichung, die nach Integration die Form annimmt

$$\tfrac{1}{2}\pi - C = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\sin A}{\sin \Pi(c)}\right),$$

was in Uebereinstimmung ist mit der Gleichung, welche C bestimmt. [21]

[**658**] Man kann aus dem Vorausgehenden zwei Ausdrücke ableiten für den Werth der Fläche jedes geschlossenen Vielecks, den einen durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, den andern nur abhängend von der Summe der Winkel des Vielecks. Die beiden Werthe der Fläche müssen unter einander gleich sein, man hat auf die Art ein neues Mittel, den Werth vieler bestimmter Integrale zu finden, Werthe, die man in anderer Weise oft nur schwer finden würde.

[*Das rechtwinklige Dreieck.*] Um hiervon ein Beispiel zu geben, betrachten wir ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck, welches zu Katheten x, y und als Hypotenuse r hat. Sei A der y, B der x gegenüberliegende Winkel. Die Gleichungen (10), (11) geben für dieses Dreieck

$$\begin{aligned}\sin\Pi(x)\sin\Pi(y) &= \sin\Pi(r)\\ \sin\Pi(x)\cos B &= \sin A\\ \cos\Pi(r)\cos A &= \cos\Pi(x)\\ \cos\Pi(r)\cos B &= \cos\Pi(y)\,.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir ab

$$\cos\Pi(r) = \frac{\cos\Pi(x)}{\cos A}$$

$$\sin\Pi(r) = \sqrt{1-\left(\frac{\cos\Pi(x)}{\cos A}\right)^2}$$

$$\sin\Pi(y) = \frac{1}{\sin\Pi(x)}\sqrt{1-\left(\frac{\cos\Pi(x)}{\cos A}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\Pi(x)^2}-\frac{\operatorname{cotg}^2\Pi(x)}{\cos^2 A}}$$

$$\operatorname{cotg}\Pi(y) = \frac{\sin A\cos\Pi(x)}{\sqrt{\cos^2 A-\cos^2\Pi(x)}}\,.$$

Setzen wir in dieser letzten Gleichung ein $\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi - \omega$, so finden wir

$$\operatorname{cotg}\Pi(y) = \frac{\sin A\sin\omega}{\sqrt{\cos^2 A-\sin^2\omega}}\,.$$

Wir haben aber gesehen [*Anm. 18*], dass das Differential der Fläche $dx\operatorname{cotg}\Pi(y)$ ist; das giebt, angewendet auf den gegenwärtigen Fall,

$$dx \operatorname{cotg} \Pi(y) = \sin A \frac{d\omega \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}},$$

[**659**] woraus wir schliessen, indem wir von $\omega = 0$ an integriren, was $x = 0$ entspricht, und bemerken, dass die durch das Integral ausgedrückte Fläche sich ausdrücken lässt durch $\frac{1}{2}\pi - A - B$, dass

$$\tfrac{1}{2}\pi - A - B = \sin A \int_0^{\omega} \frac{\operatorname{tang} \omega \, d\omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}},$$

wo A ein constanter Winkel ist, während B bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos B = \frac{\sin A}{\cos \omega}.$$

Wenn $\omega = \frac{1}{2}\pi$, so wird die Hypotenuse parallel zur Seite y, und der Winkel B wird gleich Null. Man hat also in diesem Falle

$$\tfrac{1}{2}\pi - A = \sin A \int_0^{\frac{1}{2}\pi - A} \frac{d\omega \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}}.$$

[*Dreiecksinhalt in Parallelcoordinaten.*] Man kann den Werth eines allgemeineren Integrals bestimmen, indem man die Fläche eines beliebigen geradlinigen Dreiecks betrachtet, dessen Seiten a, b, c mit den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C sind, und indem man diese Fläche in Elemente theilt durch Geraden, die untereinander parallel sind (Fig. 16). Nehmen wir den Scheitel des Winkels C zum Coordinatenanfang und die Seite a als Achse der Abscissen x. Sei $B = \Pi(\beta)$, wo β eine positive Linie ist, wenn $B < \frac{1}{2}\pi$, und negativ, wenn $B > \frac{1}{2}\pi$. Ziehen wir durch das Ende der Abscisse x eine Gerade u, die parallel ist zur Seite c,

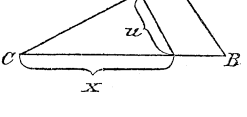

Fig. 16.

und verlängern wir diese Parallele, bis sie die Seite b schneidet. Der Winkel, den diese Parallele mit der Abscisse x bildet, wird $\Pi(\beta - a + x)$ sein, woraus folgt, dass der Winkel dieser Geraden mit der Verlängerung von x $\Pi(a - \beta - x)$ sein wird.

Nehmen wir als Element der Fläche des Dreiecks den Theil

dieser Fläche, der zwischen den beiden unendlich benachbarten Parallelen u enthalten ist, so werden wir nach dem, was weiter oben [*Seite 49*] bewiesen worden ist, den folgenden Ausdruck für dieses Element erhalten

$$dS = -d\Pi(a-\beta-x)\,(1-e^{-u})\,.$$

Betrachten wir y, x und u als Veränderliche und a und β als Constanten. Die Gleichungen (19), angewendet auf das Dreieck, dessen Seiten (x, u) sind, mit dem eingeschlossenen Winkel $\Pi(\beta-a+x)$ geben

$$\operatorname{cotg} C \sin\Pi(\beta-a+x)\sin\Pi(x)+\cos\Pi(\beta-a+x)=\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(u)}\,.$$

[**660**] Aus dieser Gleichung entnehmen wir, indem wir zur Abkürzung $\Pi(\beta-a+x)=\omega$ setzen

$$\cos\Pi(u)=\frac{\cos\Pi(x)}{\operatorname{cotg} C\sin\omega\,\sin\Pi(x)+\cos\omega}\,,$$

dann ist

$$e^{2u}=\frac{\operatorname{cotg} C\sin\omega\,\sin\Pi(x)+\cos\omega+\cos\Pi(x)}{\operatorname{cotg} C\sin\omega\,\sin\Pi(x)+\cos\omega-\cos\Pi(x)}\,.$$

Aber

$$\sin\Pi(x)=\sin\Pi[(\beta-a)-(\beta-a+x)]=\frac{\sin\Pi(\beta-a)\cos\omega}{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega}\,;$$

auf dieselbe Art finden wir

$$\cos\Pi(x)=\frac{\cos\Pi(\beta-a)-\cos\omega}{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega}\,.$$

Die Einsetzung dieser Werthe von $\sin\Pi(x)$, $\cos\Pi(x)$ in den Ausdruck von e^{2u} gibt

$$e^{2u}=\frac{\begin{array}{r}\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\omega\,[1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega]\\ +\cos\Pi(\beta-a)-\cos\omega\end{array}}{\begin{array}{r}\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\omega\,[1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega]\\ -\cos\Pi(\beta-a)+\cos\omega\end{array}}$$

$$=\frac{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\,\sin\Pi(\beta-a)+\cos\Pi(\beta-a)\sin^2\omega}{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+2\cos\omega-(1+\cos^2\omega)\cos\Pi(\beta-a)}\,,$$

und wir finden folglich

$$d\Pi(a-\beta-x)=-d\Pi(\beta-a+x)=-d\omega\,,$$

wonach der Vergleich der beiden Ausdrücke für die Fläche des Dreiecks die Gleichung gibt[22])

$$\pi - A - B - C = -\omega$$

$$+\int_{x=0}^{x=a} d\omega \sqrt{\frac{\operatorname{cotg} C \sin \Pi(\beta-a)\sin^2\omega + 2\cos\omega - (1+\cos^2\omega)\cos\Pi(\beta-a)}{\operatorname{cotg} C \sin\Pi(\beta-a)\sin^2\omega + \cos\Pi(\beta-a)\sin^2\omega}}.$$

Setzen wir noch $\Pi(\beta - a) = \alpha$, so wird diese Gleichung die Form annehmen

$$[\pi - A - B - C + \alpha - \Pi(\beta)] \sqrt{\operatorname{cotg} C \sin\alpha + \cos\alpha}$$
$$= \int_{\omega=\alpha}^{\omega=\Pi(\beta)} \frac{d\omega}{\sin\omega} \sqrt{\operatorname{cotg} C \sin\alpha \sin^2\omega + 2\cos\omega - (1+\cos^2\omega)\cos\alpha},$$

[**661**] wo die Winkel A, B und die Strecke β berechnet werden müssen mit Hülfe der Gleichungen

$$\alpha = \Pi(\beta - a), \qquad B = \Pi(\beta)$$
$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)},$$

von denen die zweite mit der letzten Gleichung (19) übereinstimmt, die auf das Dreieck angewendet wird, welches wir betrachtet haben.

[*Grenzkreiscoordinaten*] Man kann in der Pangeometrie, um die Lage eines Punktes festzulegen, ausser rechtwinkligen und Polarcoordinaten Grenzkreisbogen anwenden (*Fig. 17*) und dieses letztere System bietet viel Vortheil hinsichtlich der Einfachheit der Formeln.

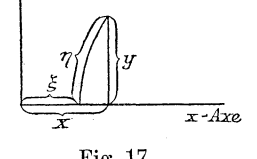

Fig. 17.

Bestimmen wir die Lage eines Punktes in der Ebene durch rechtwinklige Coordinaten x, y, so dass y die Länge des von dem Punkte aus, dessen Lage man bestimmen will, auf die x-Axe gefällten Lotes ist und x der Abstand des Fusspunktes des Lotes y vom Coordinatenanfang. Sei η die Länge des zwischen dem Ende des Lotes y und der x-Axe enthaltenen Grenzkreisbogens (wo die x-Axe zugleich die Axe des Grenzkreises ist) und nennen wir ξ den Abstand des auf

der x-Axe gelegenen Scheitels des Grenzkreises vom Coordinatenanfang. Wir haben gesehen [*Seite 35*], dass in diesem Fall

$$\eta = \operatorname{cotg} \Pi(y),$$

folglich die Gleichung des Grenzkreises [*Seite 32*]

$$e^{-(x-\xi)} = \sin \Pi(y).$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man ξ, η als Function von x und y ausdrücken, oder umgekehrt x, y als Function von ξ, η, was erlaubt, von der in x, y ausgedrückten Gleichung einer Linie überzugehen zu der in ξ, η ausgedrückten Gleichung derselben Linie oder umgekehrt.

Das Differential der ebenen Flächen drückt sich in ξ, η aus durch die Gleichung

$$d^2S = d\xi d\eta,$$

wo S die Fläche ist.

Betrachten wir S als Function von x und y, so haben wir

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{dS}{d\xi}$$

dann, indem man i. B. auf y differenzirt

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{1}{\sin \Pi(y)} \frac{d^2S}{d\xi d\eta} = \frac{1}{\sin \Pi(y)},$$

[662] was übereinstimmt mit dem, was wir weiter oben gefunden haben.

§ 7. Analytische Geometrie des Raumes.

[*Grenzkreiscoordinaten.*] Fällen wir (*Fig. 18*) von einem Raumpunkt ein Lot z auf die Ebene der Coordinaten x, y und ziehen wir durch dieses Lot eine Ebene, die die xy-Ebene in einer Geraden parallel zur x-Axe schneidet. Nehmen wir diesen Schnitt, nach der Seite des Parallelismus hin gerichtet, zur Axe eines Grenzkreises, der durch das Ende des Lotes z hindurchgeht, und sei ζ die Länge des Grenzkreises zwischen dem Ende von z und dieser Axe. Man hat

$$\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z);$$

der Theil q der durch den Fusspunkt des Lotes z gezogenen Parallele zur x-Axe, welcher zwischen dem Scheitel von ζ und dem Fusspunkt dieses Lotes liegt, wird [*Seite 32*] gegeben sein durch die Gleichung

$$e^{-q} = \sin \Pi(z) \ .$$

Der Bogen des Grenzkreises, der in der Weise durch den Fusspunkt von z gezogen ist, dass er die x-Axe in der Richtung der positiven x zur Axe hat, und der zwischen diesem Punkt und dieser Axe enthalten ist, wird $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ zur Länge haben und der Bogen η des Grenzkreises, welcher durch den Schnittpunkt von ζ mit der xy-Ebene gezogen ist, die x-Axe in der Richtung der positiven x zur Axe hat und zwischen dem Punkt und der Axe enthalten ist, ist in Folge dessen, was bewiesen [*Seite 13*] worden ist, gegeben durch die Gleichung

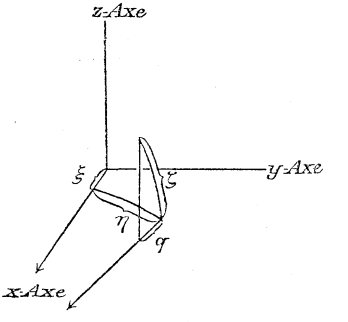

Fig. 18.

$$\eta = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin \Pi(z)} \ .$$

Nennen wir endlich ξ den Theil der x-Axe, welcher zwischen dem Coordinatenanfang und dem Bogen η enthalten ist, so gibt die Gleichung des Grenzkreises

$$e^{-x+\xi+q} = \sin \Pi(y) \ .$$

Aus diesen Gleichungen entnehmen wir, indem wir erst nur z und das davon abhängige ζ sich ändern lassen,

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin \Pi(z)} \ .$$

Lassen wir nur y und η sich ändern, so kommt

$$d\eta = \frac{dy}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)} \ .$$

Lassen wir endlich nur ξ und x sich ändern, so kommt

$$d\xi = dx \ .$$

[**663**] [*Das Viereck zwischen zwei Loten auf der xy-Ebene.*] Es bleibt, um die neue geometrische, als Pangeometrie bezeichnete Lehre zu ergänzen, welche auf neuen allgemeineren Grundlagen als die gewöhnliche Geometrie beruht, nur noch übrig, die Differentiale der Fläche einer krummen Oberfläche und des Rauminhalts eines beliebigen Körpers zu geben, ausgedrückt mit Hülfe der Coordinaten, welche die Lage eines Punktes im Raume bestimmen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke von Neuem das Viereck, dessen Seiten q, y senkrecht stehen auf der dritten x und dessen vierte Seite c senkrecht auf y steht und mit a den Winkel φ bildet. [*Vgl. Fig. 12, Seite 38.*]

Wir haben gefunden (Gleichung 25)

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(x) .$$

Hieraus finden wir mit Hülfe der Gleichungen (10), (11), indem wir r die Diagonale nennen, die vom Scheitel des Winkels φ zum Scheitel des gegenüberliegenden rechten Winkels gezogen ist, und A den Winkel zwischen x und r

$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x)$$
$$\cos A \operatorname{tang} \Pi(c) = \operatorname{tang} \Pi(r) .$$

Aus diesen beiden Gleichungen entnehmen wir

$$\cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(r) .$$

Aber

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x)$$

und folglich

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(x) .$$

Wenn c und x so klein sind, dass man die höheren Potenzen gegen die niederen vernachlässigen und als angenäherte Werthe von $\operatorname{tang} \Pi(c)$, $\operatorname{tang} \Pi(x)$ die folgenden nehmen kann

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{1}{c} ; \quad \operatorname{tang} \Pi(x) = \frac{1}{x} ,$$

so findet man

$$c = \frac{x}{\sin \Pi(a)} . \tag{28}$$

Die Gerade c, welche die Enden von a und y verbindet, wird nicht senkrecht zu y sein, wenn $a = y$ in dem Viereck.

In diesem Falle wird die Gerade p, welche die Mitte von c mit der Mitte von x verbindet, zu c und zu x senkrecht sein. Wir können also in (28) c durch $\frac{1}{2}c$ und x durch $\frac{1}{2}x$ ersetzen, was die Form dieser Gleichung nicht ändert. Sie ist so bewiesen auch für den Fall $a = y$, ein Fall, auf den der oben gegebene Beweis nicht unmittelbar anwendbar ist.

[**664**] Die Flächeninhalte der gekrümmten Oberflächen haben als Maass die Summe der Dreiecksflächen, welche ein stetiges Netz bilden, dessen Ecken alle auf der Oberfläche gelegen sind. Dieses Maass wird um so genauer sein, je kleiner die Abmessungen dieser Dreiecke sein werden.[23])

Die Grenze, der diese Summe sich unbegrenzt nähert, wenn die Abmessungen der Dreiecke unbegrenzt abnehmen und von der sie sich unterscheiden kann um eine Grösse, die kleiner ist als jede gegebene Grösse, wird der mathematische Werth des Flächeninhalts der Oberfläche genannt. Bestimmen wir zuerst den Flächeninhalt eines geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks als Function der Seiten, die wir mit a, b, c bezeichnen werden, und nennen wir $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ die entsprechend gegenüberliegenden Winkel.

[*Inhalt des geradlinigen rechtwinkligen Dreiecks, ausgedrückt durch die Seiten.*] Wir haben [*Seite 17*] gesehen, dass man in einem solchen Dreieck für

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ \alpha\,,\ \beta$$

die Strecken

$$\alpha\,,\ \alpha'\,,\ \beta\,,\ b'\,,\ c$$

entsprechend setzen kann.

Ausserdem haben wir [*Seite 23*] gefunden, dass

$$2\Pi(b) = \Pi(c + \beta) + \Pi(c - \beta)\,;$$

setzen wir in dieser Gleichung α' für b, β für c, und c für β, so kommt

$$\pi - 2\Pi(\alpha) = \Pi(\beta + c) + \Pi(\beta - c)$$

oder

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta)\,.$$

Auf dieselbe Weise finden wir

$$2\Pi(\beta) = \Pi(c - \alpha) - \Pi(c + \alpha)\,.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung die Buchstaben, wie es weiter oben gesagt worden ist, so wird man erhalten

$$2\Pi(c) = \Pi(\beta - b') - \Pi(\beta + b')\,.$$

Auf dieselbe Weise hat man

$$2\Pi(c) = \Pi(\alpha - a') - \Pi(\alpha + a'),$$

woraus wir durch die oben angegebene Buchstabenvertauschung erhalten

$$2\Pi(\beta) = \Pi(b' - a') - \Pi(b' + a').$$

Auf dieselbe Weise hat man

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(a' - b') - \Pi(a' + b');$$

[**665**] indem wir die beiden letzten Gleichungen hinzufügen, finden wir

$$2\Pi(\alpha) + 2\Pi(\beta) = \pi - 2\Pi(a' + b'),$$

danach ist der Flächeninhalt des Dreiecks Δ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta) = \Pi(a' + b')$$

und folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Delta = e^{-a'}e^{-b'} = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(a)\right)\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(b)\right),$$

woraus wir endlich entnehmen

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}\cdot\frac{e^b - 1}{e^b + 1}.$$

Wenn a und b sehr klein sind, so dass man die höheren Potenzen von q, l und Δ vernachlässigen kann, so giebt diese Formel

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab$$

wie in der gewöhnlichen Geometrie. [*Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck.*] Man weiss, dass man immer in jedem beliebigen geradlinigen Dreieck die Seite c so wählen kann, dass das vom Scheitel des gegenüberliegenden Winkels C auf die Richtung dieser Geraden gefällte Lot auf c selbst fällt und nicht auf ihre Verlängerung; dieses Lot theilt die Seite c in zwei Theile, von denen der eine x dem Winkel A anliegt, der andere $c - x$ dem Winkel B. Der Flächeninhalt S dieses Dreiecks wird gleich sein der Summe der Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke, die durch dieses Lot h gebildet werden, und wird durch die Gleichung gegeben sein

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S = \frac{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\dfrac{e^h-1}{e^h+1} + \dfrac{e^{c-x}-1}{e^{c-x}+1}\cdot\dfrac{e^h-1}{e^h+1}}{1 - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\dfrac{e^{c-x}-1}{e^{c-x}+1}\left(\dfrac{e^h-1}{e^h+1}\right)^2},$$

eine Gleichung, der man die Form geben kann[24])

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}S = \frac{(e^{2h}-1)(e^c-1)}{(e^x+e^{c-x})(e^h+1)^2 + 2e^h(e^x-1)(e^{c-x}-1)};$$

diese Formel giebt, wenn man die höheren Potenzen von S, h, c [*und* x] den niederen gegenüber vernachlässigt,

$$S = \tfrac{1}{2}ch$$

[**666**] wie in der gewöhnlichen Geometrie.

[*Inhalt des geradlinigen Dreiecks, ausgedrückt durch die Seiten.*] Wir haben gesehen, dass der Ausdruck der Fläche dieses Dreiecks als Function der drei Winkel war

$$S = \pi - A - B - C.$$

Nehmen wir den Werth A als Function von a, b, c aus der zweiten der Gleichungen (19).

Das giebt die Gleichung

$$\cos A = \frac{1 - \dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}}{\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

woraus folgt

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{1 + \cos\Pi(b)\cos\Pi(c) - \dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}}{\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}.$$

Setzen wir in dieser Formel an Stelle von

$$1 + \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)$$

seinen Werth

$$\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(b+c)},$$

so nimmt sie die Gestalt an

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A = \operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b+c)} - \frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\};$$

auf dieselbe Weise findet man

$$-2\sin^2\tfrac{1}{2}A = \operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b-c)} - \frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\};$$

aus diesen beiden Formeln leiten wir ab

$$\sin^2 A = \operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)\left\{-\frac{1-\cos^2\Pi(b)\cos^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(b)\sin^2\Pi(c)} + \frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\sin^2\Pi(a)}\right\},$$

oder

$$\sin^2 A = -\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin^2\Pi(a)} + \frac{1}{\sin^2\Pi(b)} + \frac{1}{\sin^2\Pi(c)} - \frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - 1\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$P = \sqrt{-\frac{1}{\sin^2\Pi(a)} - \frac{1}{\sin^2\Pi(b)} - \frac{1}{\sin^2\Pi(c)} + \frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} + 1},$$

so hat man

$$\sin A = \operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\,P. \tag{29}$$

[667] Man kann P auch die folgende Form geben:

$$P^2 = 2\left\{1+\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin\Pi(b)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\} - \left\{1+\frac{1}{\sin\Pi(a)}+\frac{1}{\sin\Pi(b)}+\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}^2,$$

die in Bezug auf a, b, c symmetrisch ist.

Geht man von der Gleichung (29) aus und betrachtet man darin P als eine unbestimmte Grösse, so kann man auf folgende Weise finden, dass P eine in Bezug auf a, b, c symmetrische Function sein muss.

Multipliciren wir die Gleichung (29) mit $\operatorname{tang}\Pi(a)$, setzen wir darin für $\sin A \operatorname{tang}\Pi(a)$ seinen Werth $\sin B \operatorname{tang}\Pi(b)$, der aus der Gleichung (13) entnommen ist, und theilen wir danach mit $\operatorname{tang}\Pi(b)$, so wird kommen

$$\sin B = \operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(c)\,P.$$

Multipliciren wir diese letzte Gleichung mit $\operatorname{tang}\Pi(b)$, setzen wir hier für $\sin B \operatorname{tang}\Pi(b)$ seinen Werth $\sin C \operatorname{tang}\Pi(c)$, der

aus der Gleichung (13) entnommen ist, und theilen wir danach mit $\operatorname{tang} \Pi(c)$, so werden wir haben

$$\sin C = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b)\, P,$$

das beweist, dass P eine symmetrische Function der Seiten a, b, c ist.

Wir haben schon [*Seite 29*] gefunden

$$\cos A = \frac{1 - \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

oder, was dasselbe ist

$$\cos A = \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\};$$

auf dieselbe Weise findet man

$$\cos B = \operatorname{tang} \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)} - \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}$$

$$\cos C = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)} - \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\}.$$

[**668**] Aus diesen Werthen von $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ leiten wir ab

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a) P \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)} - \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}$$

$$+ \operatorname{tang}^2 \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) P \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\}$$

$$= \operatorname{tg} \Pi(a) \operatorname{tg} \Pi(b) \operatorname{tg}^2 \Pi(c) P \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c)} - 1 \right\}$$

und endlich

$$\sin(A + B) = \frac{\operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) P}{\left\{ \dfrac{1}{\sin \Pi(c)} + 1 \right\}} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}.$$

Die dritte Gleichung (19) giebt

$$\cos A + \cos(B + C) = \sin B \sin C \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\}.$$

Setzen wir in diese Gleichung an Stelle von $\sin B$, $\sin C$ ihre aus Gleichung (29) entnommenen Werthe, so wird sie geben

$$\cos(B+C) = -\cos A + \operatorname{tg}\Pi(c)\operatorname{tg}^2\Pi(a)\operatorname{tg}\Pi(b)P^2\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right\}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\cos(B+C) = -\cos A + \frac{\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}.$$

Mit Hülfe der vorausgehenden Formeln finden wir

$$\cos(A+B+C) = \cos A\cos(B+C) - \sin A\sin(B+C)$$

$$= -\cos^2 A + \frac{\operatorname{tg}^2\Pi(b)\operatorname{tg}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)} + \frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}.$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$= \sin^2 A + \frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)} + \frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}.$$

[669] $2\cos^2\frac{1}{2}(A+B+C) = \operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2\Pi(b)\operatorname{tg}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\sin\Pi(a)} - \frac{1}{\sin\Pi(b)} - \frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\Pi(b)\operatorname{tg}^2\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\sin\Pi(b)} - \frac{1}{\sin\Pi(c)} + 1\right\}$$

$$= \operatorname{tg}^2\Pi(a)\operatorname{tg}^2\Pi(b)\operatorname{tg}^2\Pi(c)P^2\left(\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(b)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(c)}-1\right).$$

Aber es ist bewiesen, dass die Fläche des Dreiecks $\Delta = \pi - A - B - C$, folglich

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\,P$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(b)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\Pi(c)}-1\right)}\,.$$

Wenn a, b, c sehr klein sind, so dass man mit hinreichender Annäherung setzen kann

$$\frac{1}{\sin\Pi(a)} = 1+\tfrac{1}{2}a^2;\quad \frac{1}{\sin\Pi(b)} = 1+\tfrac{1}{2}b^2$$

$$\frac{1}{\sin\Pi(c)} = 1+\tfrac{1}{2}c^2;\quad \operatorname{tang}\Pi(a) = \frac{1}{a}(1-\tfrac{1}{6}a^2)$$

$$\operatorname{tang}\Pi(b) = \frac{1}{b}(1-\tfrac{1}{6}b^2);\quad \operatorname{tang}\Pi(c) = \frac{1}{c}(1-\tfrac{1}{6}c^2),$$

so wird kommen[25])

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

oder, indem man die höheren Potenzen von Δ vernachlässigt,

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}\,.$$

[*Oberflächenelement in rechtwinkligen Coordinaten.*] Bestimmen wir die Lage eines Punktes im Raume durch drei rechtwinklige Coordinaten: z das Lot auf der xy-Ebene, y das vom Fusspunkte von z auf die x-Axe gefällte Lot und x den Theil der Axe zwischen dem Coordinatenanfang und dem Fusspunkte von y. Nehmen wir auf der gekrümmten Fläche, deren [**670**] Oberflächenelement bestimmt werden soll, drei Punkte und seien die Coordinaten des ersten Punktes x, y, z, die Coordinaten des zweiten Punktes

$$x+dx,\ y,\ z+\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$$

und die Coordinaten des dritten Punktes

$$x,\ y+dy,\ z+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\,.$$

Nennen wir t den Abstand zwischen den beiden Loten zur x-Axe, die gleich y sind und zwischen sich einen Theil dx

dieser Axe enthalten. Indem man dx, dy unendlich klein annimmt, werden wir in Folge der Gleichung (28) haben

$$t = \frac{dx}{\sin \Pi(y)}.$$

Der Abstand der beiden ersten Punkte, genommen auf der gekrümmten Oberfläche, bildet ein Dreieck mit den Geraden, deren Längen sind:[26]

$$\frac{dx}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) dx.$$

Wir können dieses Dreieck wegen der Kleinheit seiner Seiten als ein Dreieck betrachten, dessen Hypotenuse der Abstand zwischen den beiden ersten Punkten, genommen auf der Oberfläche ist. Wir werden also als Quadrat des Abstandes haben

$$dx^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\}.$$

Auf dieselbe Weise finden wir für das Quadrat des Abstandes des ersten Punktes vom dritten

$$dy^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}$$

und für den Abstand des zweiten Punktes vom dritten

$$\frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \frac{dy^2}{\sin^2 \Pi(z)} + \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \right\}^2.$$

Die Fläche des Dreiecks, dessen Seiten die Abstände des ersten Punktes genommen auf der Oberfläche vom zweiten, des zweiten vom dritten und des dritten vom ersten sind, und dessen Winkelsumme merklich gleich π sein wird wegen [**671**] der Kleinheit der Seiten, wird in Folge der weiter oben [*Seite 65*] bewiesenen Formel und der Werthe, die wir für die Quadrate der Seiten gefunden haben, sein[27]

$$\frac{d^2 S}{dx\, dy} = \frac{1}{2 \sin \Pi(z)} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \Pi(y)} \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}},$$

welches das Flächenelement für die gekrümmte Oberfläche ist, deren Gleichung lautet

$$z = f(x, y).$$

[*Kugeloberfläche.*] Wenden wir diesen Ausdruck auf eine Kugel vom Radius r an. Wenn der Coordinatenanfang im Mittelpunkte der Kugel ist, so wird die Gleichung der Kugel geben:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(z)}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos\Pi(y)}{\cos\Pi(z)}$$

und folglich

$$\frac{\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)} \cdot \frac{\sin\Pi(y)\sin^2\Pi(x)}{\sqrt{\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(y) - \sin^2\Pi(r)}} = \frac{d^2S}{d\Pi(x)\,d\Pi(y)}.$$

Multipliciren wir mit $d\Pi(y)$ und integriren wir von $\sin\Pi(y) = \frac{\sin\Pi(r)}{\sin\Pi(x)}$ bis $\Pi(y) = \frac{1}{2}\pi$, so wird kommen:

$$\frac{dS}{d\Pi(x)} = 2\pi\sin\Pi(x)\frac{\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)}.$$

Multipliciren wir noch mit $d\Pi(x)$ und integriren bis $\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi$ so werden wir haben:

$$S = \frac{2\pi\cos\Pi(r)\cos\Pi(x)}{\sin^2\Pi(r)},$$

was die Fläche des Kugelabschnittes zwischen zwei Ebenen senkrecht zu einem und demselben Radius ist, von denen die eine durch den Mittelpunkt der Kugel geht und die andere die die Entfernung x vom Mittelpunkte hat. Um die Oberfläche der ganzen Kugel zu erhalten, muss man in dieser Formel $x = r$ setzen und das Resultat verdoppeln. Auf diese Weise erhält man für den Inhalt der Fläche der ganzen Kugel den Ausdruck

$$4\pi\operatorname{cotg}^2\Pi(r)$$

oder

$$\pi(e^r - e^{-r})^2;$$

wenn r so klein ist, dass man die höheren Potenzen von r vernachlässigen kann, reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$4\pi r^2$$

wie in der gewöhnlichen Geometrie.

[**672**] [*Neue Coordinaten.*] Setzen wir

$$\cos\psi = \operatorname{tang} \Pi(r) \operatorname{cotg} \Pi(y)$$
$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(r) \sin\psi \sin\varphi$$

und führen wir die neuen Veränderlichen ψ, φ an Stelle von x, y in den Ausdruck des Elementes der Oberfläche der Kugel vom Radius r ein, welchen wir kennen gelernt haben.

Wir finden [28])

$$\frac{d^2S}{d\psi\, d\varphi} = -\frac{\cos^2 \Pi(r)}{\sin \Pi(r)} \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $8\, d\psi\, d\varphi$ und [29]) integriren von $\psi = 0$ an bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$, dann von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, was uns die Oberfläche der ganzen Kugel geben wird. Indem man diesen Ausdruck für die Oberfläche der ganzen Kugel dem Ausdrucke derselben Oberfläche, den wir weiter oben [*Seite 67*] gefunden haben, gleichsetzen, schliessen wir, dass [30])

$$(30)\quad \frac{\pi}{2 \sin \Pi(r)} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi}.$$

Wenn wir mit $E(\alpha)$ das elliptische Integral bezeichnen

$$E(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\varphi},$$

wo α die Constante ist, die sich unter dem Integralzeichen befindet, so haben wir [31])

$$\frac{\pi\alpha}{2 \sin \Pi(r)} = \int_0^{\alpha} \frac{x\, dx\, E(x)}{(1 - x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Indem man im Integral (30) $\frac{1}{2}\pi - R$ an Stelle von $\Pi(r)$ setzt, kommt

$$\tfrac{1}{2}\pi R = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sin R}{\sqrt{1 - \sin^2\psi \sin^2\varphi \sin^2 R}}.$$

Führen wir die Integration in Bezug auf ψ innerhalb der angegebenen Grenzen aus, so finden wir

$$\pi R = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \log\left(\frac{1 + \sin\varphi \sin R}{1 - \sin\varphi \sin R}\right),$$

was, wenn man $\Pi(x)$ an Stelle von φ setzt, die Form annimmt

$$\pi R = \int_0^\infty dx \log \left\{ \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin R}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin R} \right\} .$$

[**673**] Die Integration nach Theilen führt diese Gleichung zurück auf

$$\frac{1}{4}\pi \frac{R}{\sin R} = \int_0^\infty \frac{(e^{2x} - 1) e^x x \, dx}{e^{4x} + e^{2x} \cos 2R + 1} . \tag{31}$$

Für $R = \frac{1}{2}\pi$ giebt diese Gleichung

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \int_0^\infty \frac{e^x x \, dx}{e^{2x} - 1} .$$

Es ist leicht zu beweisen, dass die Gleichung (31) richtig bleibt, selbst wenn man an Stelle von $\cos R$ eine Zahl setzt, die grösser ist als die Einheit.

In der That hat man

$$\int_0^\pi d\psi \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi = 0 ,$$

woraus folgt, dass für jede Zahl a

$$\int_0^\pi d\psi \log (e^a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi) = a\pi .$$

Transformiren wir dieses Integral, indem wir $e^a \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\psi = e^x$ setzen, so wird kommen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^{x-a} + e^{-x+a}} = \tfrac{1}{2}\pi a .$$

Man kann dieser Gleichung leicht die folgende Form geben

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x}) x \, dx}{e^{2x} + e^{2a} + e^{-2a} + e^{-2x}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{e^a - e^{-a}}\right) ,$$

von wo man zurückkommt auf die Gleichung (31), indem man a durch $a\sqrt{-1}$ ersetzt.

[*Grenzkreiscoordinaten zur Bestimmung des Raumelements.*] Wenn wir als Coordinaten Bögen von Grenzkreisen nehmen,[32] von denen der eine ζ in der Ebene gelegen ist, welche durch das vom Punkte auf die xy-Ebene gefällte Lot und durch die Parallele zur x-Axe geht, welche durch den Fusspunkt

des Lotes geht und diese Parallele zur Axe hat, der andere η in der xy-Ebene gelegen ist, die x-Axe zur Axe hat und durch den Fusspunkt von ζ geht, und wenn wir als dritte Coordinate den Theil ξ der x-Axe nehmen, der zwischen dem Coordinatenanfang und dem Scheitel des zweiten Bogens liegt, [*vgl. Fig. 18, Seite 57*] so muss das Element des Volumens P sein $d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Man hat also

$$d^3P = d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.$$

[**674**] Setzen wir noch $\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z)$, wo z das vom gegebenen Punkte auf die xy-Ebene gefällte Lot ist, so werden wir haben[33])

$$\frac{d^3P}{d\xi\, d\eta\, d\zeta} = \frac{1}{\sin \Pi(z)}\,.$$

Aus der Gleichung des Grenzkreises entnehmen wir [*Seite 33*]

$$e^{-p} = \sin \Pi(z)\,,$$

wo p den Abstand des Schnittpunktes des Bogens ζ mit der xy-Ebene vom Fusspunkte des Lotes z bezeichnet. Indem man bemerkt, dass man zu Folge der Gleichung des Grenzkreises und des Werthes des Bogens des Grenzkreises als Function der Ordinate [*Seite 35, Gleichung 22*] hat

$$e^{-p} = \operatorname{cotg} \Pi(y) = \eta e^{-p}$$
$$e^{\xi - x} = \sin \Pi(z) \sin \Pi(y)\,,$$

so findet man

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}; \quad dx = d\xi\,;$$

woraus folgt, dass

$$\frac{d^3P}{dx\, dy\, dz} = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}\,.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dx und integrirt in Bezug auf x von $x = 0$ an, so finden wir

$$\frac{d^2P}{dy\, dz} = \frac{x}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}\,;$$

indem man denselben Ausdruck mit dy multiplicirt und integrirt in Bezug auf y von $y = 0$ an

$$\frac{d^2P}{dx\,dz} = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin^2 \Pi(x)},$$

und endlich, indem man mit dz multiplicirt und integrirt in Bezug auf z von $z = 0$ an

$$\frac{d^2P}{dx\,dy} = \frac{1}{8 \sin \Pi(y)} [e^{2z} + e^{-2z} + 4z].$$

[*Kugelinhalt.*] Multiplicirt man den vorletzten dieser Ausdrücke mit $dx\,dz$, integrirt zuerst in Bezug auf z von $z = 0$ an bis zu dem Werthe z, der aus der Gleichung

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(z)$$

[**675**] entnommen ist, und dann in Bezug auf x von $x = 0$ bis $x = r$, und multiplicirt man das Ergebniss mit 8, um den Rauminhalt der ganzen Kugel zu haben, so wird man den Rauminhalt der ganzen Kugel $= \frac{1}{2}\pi(e^{2r} - e^{-2r} - 4r)$ finden, was für sehr kleines r giebt $\frac{4}{3}\pi r^3$, wie in der gewöhnlichen Geometrie.

[*Raumelement in Polarcoordinaten.*] Sei, um das Raumelement in Polarcoordinaten auszudrücken [*Fig. 19*], r der Abstand des Coordinatenanfangs von einem Raumpunkte, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind. Nennen wir q die Gerade, die in der xy-Ebene vom Coordinatenanfang zum Fusspunkte von z gezogen ist, ϑ[34]) den Winkel zwischen r und q, w den Winkel zwischen q und der positiven x-Axe.

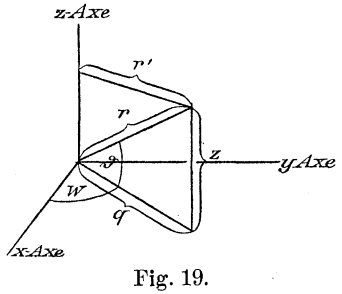

Fig. 19.

Setzen wir noch $\Pi(x) = X$, $\Pi(y) = Y$, $\Pi(z) = Z$, $\Pi(r) = R$, $\Pi(q) = Q$. Ziehen wir eine Ebene senkrecht zur z-Axe, welche durch den gegebenen Punkt geht. Es sei r' die in dieser Ebene vom gegebenen Punkte nach der z-Axe gezogene Gerade und wir setzen noch $\Pi(r') = R'$. Construiren wir endlich eine Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt. Die xy-Ebene wird diese Kugel in einem grössten Kreise vom Radius r schneiden,

dessen Umfang nach dem, was weiter oben [*Seite 34*] bewiesen worden ist, gleich sein wird

$$2\pi \operatorname{cotg} R,$$

der Theil des Umfanges, welcher zwischen zwei Ebenen eingeschlossen ist, die alle beide durch die z-Axe gehen und gegen einander unter dem Winkel ω geneigt sind, muss sein

$$\omega \operatorname{cotg} R.$$

Der Umfang des Kreises, den der Schnitt derselben Kugel mit der Ebene, die durch den gegebenen Punkt geht und senkrecht zur z-Axe ist, wird gleich sein

$$2\pi \operatorname{cotg} R'$$

und der Theil dieses Umfanges, der durch die beiden durch die z-Axe gehenden, gegen einander unter dem Winkel ω geneigten Ebenen gebildet wird, muss sein

$$\omega \operatorname{cotg} R'.$$

Der Zuwachs dieses letzten Bogens, welcher durch den Zuwachs $d\omega$ des Winkels ω erzeugt wird, muss sein

$$d\omega \operatorname{cotg} R'.$$

Das Dreieck, dessen Hypotenuse r, dessen eine Kathete r' mit dem gegenüberliegenden Winkel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ ist, giebt (nach Gleichung 13)

$$\operatorname{tang} R' \cos\vartheta = \operatorname{tang} R,$$

woraus folgt, dass

$$d\omega \operatorname{cotg} R' = d\omega \cos\vartheta \operatorname{cotg} R.$$

[**676**] Der Umfang des Kreises, welcher der Schnitt derselben Kugel mit einer durch die z-Axe gelegten Ebene ist, ist gleich

$$2\pi \operatorname{cotg} R,$$

und der Bogen dieses Kreises, welcher dem Winkel ϑ im Mittelpunkte entspricht, muss sein

$$\vartheta \operatorname{cotg} R,$$

woraus folgt, dass der Zuwachs dieses Bogens, der einem Zuwachs $d\vartheta$ des Winkels ϑ entspricht, sein muss

$$d\vartheta \operatorname{cotg} R.$$

Wenn jeder Zuwachs unendlich klein wird, so wird das Volumenelement wie in der gewöhnlichen Geometrie ausgedrückt durch das Product der drei zu einander senkrechten Strecken

$$dr,\ d\omega \cos\vartheta \operatorname{cotg} R,\ d\vartheta \operatorname{cotg} R,$$

weil es als ein Prisma betrachtet werden kann; man wird also den folgenden Ausdruck des Raumelements in Polarcoordinaten erhalten

$$dr\, d\omega\, d\vartheta \cos\vartheta \operatorname{cotg}^2 R = d^3P,$$

oder, indem man für $\operatorname{cotg}^2 R$ seinen Werth in r einsetzt,

$$d^3P = \tfrac{1}{4} dr\, d\omega\, d\vartheta \cos\vartheta (e^r - e^{-r})^2.$$

Indem man zuerst in Bezug auf r von $r = 0$ an integrirt, kommt[35])

$$d^3P = \tfrac{1}{8} d\omega\, d\vartheta \cos\vartheta (e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

[*Kugelinhalt.*] Für die Kugel, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfang ist, hängt r nicht von ϑ und ω ab. Indem man in Bezug auf ω von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$ und in Bezug auf ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ integrirt, und indem man das Resultat verdoppelt, kommt für den Rauminhalt der ganzen Kugel $\frac{1}{2}\pi(e^{2r} - e^{-2r} - 4r)$ wie weiter oben [*Seite 71*].

[*Grenzkugelsector.*] Nehmen wir jetzt einen Theil S der Oberfläche der Grenzkugel, der eingeschlossen ist durch eine in sich zurücklaufende Randcurve, ziehen wir durch die verschiedenen Punkte dieser Randcurve Gerade, die zur Axe parallel sind, so werden diese eine Fläche bilden, die wir nach Analogie conisch nennen, und die sich unbegrenzt nach beiden Seiten erstreckt, von der wir aber nur den auf der Seite des Parallelismus der Axen der Grenzkugel gelegenen Theil betrachten. Es sei S' der Theil einer zweiten Grenzkugel, deren Axen denen der ersten parallel sind, und im selben Sinne gerichtet, und zwar soll es der im Innern der conischen Fläche gelegene Theil sein. S, S' und der Theil der [**677**] conischen Fläche, der zwischen den beiden Grenzkugeln gelegen ist, schliessen einen in jeder Beziehung[36]) endlichen Rauminhalt ein, den wir zu bestimmen uns vornehmen. Nennen wir c den Theil einer Axe der beiden Grenzkugeln, welcher zwischen ihnen eingeschlossen ist, tragen wir eine Länge gleich c mehrfach ab auf einer der Axen der ersten Grenzkugel, welche durch einen Punkt der Randcurve von S geht, und zwar von dem Punkte an, wo die Axe S'

durchbohrt, und legen wir durch die Theilpunkte Grenzkugeln, deren Axen den Axen der beiden ersten gleichsinnig parallel sind. Seien S'', S''' u. s. w. die Theile dieser aufeinanderfolgenden Grenzkugeln, welche von der conischen Fläche begrenzt werden. Es folgt leicht aus dem, was weiter oben [*Seite 11*] in Bezug auf die Grenzkreisbogen bewiesen worden ist, die wie die jetzt betrachteten Theile einer Grenzkugel gelegen sind, dass man immer haben wird

$$S' = Se^{-2c}$$
$$S'' = Se^{-4c}$$
$$S''' = S'e^{-6c} \text{ u. s. w.}$$

Nennen wir ebenso P, P', P'', P''' u. s. w. die Räume, die durch die conische Fläche zwischen S und S', zwischen S' und S'' u. s. w. begrenzt wird, und lenken wir unsere Aufmerksamkeit darauf, dass die Räume P, P', P'' u. s. w. den Flächen S, S', S'' u. s. w. proportional sein müssen. [*Vgl. Seite 11.*]

Wir müssen also haben

$$P = CS,$$

wo C eine Function von c allein ist; es folgt daraus, dass

$$P' = CS' = CSe^{-2c}$$
$$P'' = CS'' = CSe^{-4c} \text{ u. s. w.}$$

Die Summe $\sum_0^\infty P^{(n)}$ wird also der Raum sein, der von der conischen Fläche begrenzt wird, deren Grundfläche S ist und die unbegrenzt verlängert wird nach der Seite des Parallelismus der erzeugenden Geraden hin. Sei K dieser Raum, so werden wir haben

$$K = \frac{CS}{1 - e^{-2c}};$$

Diese Grösse darf nicht von c abhängen, was fordert, dass man hat

$$C = (1 - e^{-2c})A,$$

wo A eine absolute Zahl ist, und da die Raumeinheit willkürlich ist, werden wir nehmen

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2c})$$

zu dem Zwecke, dass der Rauminhalt P, der

$$P = \tfrac{1}{2} S(1 - e^{-2c}),$$

[678] ist, den Werth $P = cS$ erhält, wenn c unendlich klein ist, ein Ausdruck, der zusammenfällt mit dem Ausdrucke für den Rauminhalt eines Prismas von der Grundfläche S und der Höhe c in der gewöhnlichen Geometrie. Man kann noch als Raumelement den Rauminhalt nehmen, der innerhalb einer conischen Fläche liegt, welche durch die Axen der Oberfläche einer Grenzkugel gebildet wird, die gelegt sind durch alle Punkte des Randes eines in jeder Beziehung[37]) unendlich kleinen Theiles der Fläche.

Die grosse Zahl der verschiedenen Ausdrücke für das Element derselben geometrischen Grösse giebt Mittel zur Vergleichung von Integralen, Mittel die in der Lehre von den bestimmten Integralen besonders nützlich sind.

§ 8. Rückblick.

Nachdem wir im Vorausgehenden gezeigt haben, auf welche Weise man die Länge der gekrümmten Linien, den Flächeninhalt der Oberflächen und den Rauminhalt der Körper berechnen kann, dürfen wir behaupten, dass die Pangeometrie eine abgeschlossene geometrische Lehre ist. Ein einziger Blick auf die Gleichungen (19), welche die zwischen den Seiten und den Winkeln geradliniger Dreiecke bestehende Abhängigkeit ausdrücken, genügt, um zu beweisen, dass die Pangeometrie von hier an eine analytische Methode wird, welche die analytischen Methoden der gewöhnlichen Geometrie ersetzt und erweitert. Man könnte die Auseinandersetzung der Pangeometrie mit den Gleichungen (19) beginnen und selbst versuchen, an Stelle dieser Gleichungen andere zu setzen, welche die Abhängigkeit zwischen den Seiten und den Winkeln jedes geradlinigen Dreiecks ausdrücken würden; aber in diesem letzten Falle müsste man beweisen, dass diese neuen Gleichungen mit den Grundbegriffen der Geometrie übereinstimmen[38]). Die Gleichungen (19) aber, die aus den Grundbegriffen abgeleitet sind, stimmen also nothwendig mit ihnen überein, und alle Gleichungen, die man an ihre Stelle setzen wollte, müssen, wenn sie keine Folge der Gleichungen (19) sind, auf Ergebnisse führen, die diesen Begriffen widersprechen. Die Gleichungen (19)

sind also die Grundlage der allgemeinsten Geometrie, weil sie nicht von der Voraussetzung abhängen, dass die Summe der drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich ist.

§ 9. Gilt in unserm Raume die Pangeometrie?

[*Dreiecksmessungen.*] Die Pangeometrie, welche auf bestimmte Grundlagen gegründet ist, und die in dem Vorausgehenden entwickelt worden ist, giebt, wie man gesehen hat, Methoden, welche geeignet sind, den Werth verschiedener geometrischer Grössen zu berechnen, und beweist zu gleicher Zeit, dass die Annahme, dass der Werth der Summe der drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks constant ist, eine Annahme, die ausdrücklich oder versteckt in der gewöhnlichen Geometrie gemacht wird, keine nothwendige Folge unserer Begriffe vom Raume ist. Nur die Erfahrung kann die Wahrheit dieser Annahme bestätigen, z. B. die wirkliche Messung von den drei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks, eine Messung, die auf sehr verschiedene Art vorgenommen werden kann. Man kann [**679**] die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks auf einer künstlichen Ebene messen, oder die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks im Raume.[39]) In diesem letzteren Falle wird man die Dreiecke bevorzugen müssen, deren Seiten sehr gross sind, weil nach der Pangeometrie der Unterschied zwischen zwei rechten Winkeln und der Summe von drei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks um so grösser wird, je grösser die Seiten sind.

[*Probe durch Kreistheilung.*] Sei r der Halbmesser eines Kreises, A ein Winkel im Mittelpunkte, dessen Seiten einen Bogen umfassen, der von einer Sehne gleich r überspannt wird. Nennen wir p das vom Mittelpunkte dieses Kreises auf die Sehne gefällte Lot, welche durch den Fusspunkt des Lotes in zwei gleiche Theile zerlegt wird. Betrachten wir eines der beiden rechtwinkligen Dreiecke, die von diesem Lote, den zu beiden Seiten des Winkels A liegenden Halbmessern und der Sehne gebildet werden, ein Dreieck, dessen Hypotenuse r und dessen Katheten $\frac{1}{2}r$ und p sein werden.

Nach der allgemeinen Gleichung (13) wird man in diesem Dreieck haben

$$\sin \tfrac{1}{2} A \operatorname{tang} \pi(\tfrac{1}{2} r) = \operatorname{tang} \Pi(r) ,$$

eine Gleichung die, zusammengesetzt mit der identischen Gleichung

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2}r)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2}r)}$$

ergiebt

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2}r) .$$

In der gewöhnlichen Geometrie hat man

$$A = \tfrac{1}{3}\pi .$$

Nehmen wir an, dass die wirkliche Messung ergiebt

$$A = \frac{2\pi}{6 + K},$$

wo K eine positive Zahl ist.

Man wird also haben müssen

$$\sin\left(\frac{\pi}{6 + K}\right) = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2}r) .$$

Wenn r und K gegeben sind, kann man aus dieser Gleichung den Werth von $\Pi(\frac{1}{2}r)$ entnehmen, mit Hülfe dessen man den Parallelwinkel $\Pi(x)$ für jede Strecke x bestimmen kann. Die Abstände zwischen den Himmelskörpern geben uns das Mittel, Winkel von Dreiecken mit sehr grossen Seiten zu beobachten.

[*Bestimmung von $\Pi(x)$ aus Fixsternbeobachtungen.*][40] Sei α die geocentrische [**680**] Breite eines Fixsterns zu einer bestimmten Epoche, und β eine andere Breite desselben Fixsternes, eine Breite, die einer Epoche entspricht, wo die Erde sich von Neuem in der Ebene senkrecht zur Ekliptik befindet, die durch die erste Stellung gelegt ist (d. h. die Stellung, wo die Breite des Sternes α war); sei $2a$ der Abstand zwischen diesen beiden Lagen der Erde und δ der Winkel, unter dem der Abstand $2a$ vom Stern aus erscheint. [*Fig. 20.*]

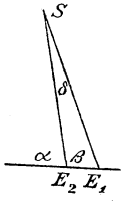

Fig. 20.

Wenn die Winkel α, β, δ nicht der Beziehung genügen

$$\alpha = \beta + \delta ,$$

so wird das ein Zeichen sein, dass die Summe der drei Winkel sich von zwei rechten Winkeln unterscheidet.

Man kann den Stern so wählen, dass δ gleich Null ist, und man wird immer annehmen können, dass es eine Linie x giebt, so dass

$$\Pi(x) = \alpha .$$

Wenn $\delta = 0$, so können die Geraden, die von den beiden Stellungen der Erde zum Stern gezogen sind, parallel angenommen werden, und folglich wird man haben müssen

$$\beta = \Pi(x + 2a) ,$$

woraus nach dem, was weiter oben [*Seite 24*] bewiesen ist, folgt, dass

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = e^{-x}$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = e^{-x-2a} .$$

Jedesmal, wenn die Beobachtung für einen Stern, in Bezug auf welchen der mit δ bezeichnete Winkel Null ist, zwei verschiedene Winkel α, β geben wird, werden die beiden letzten Gleichungen x und a ausgedrückt durch die in der Pangeometrie als Einheit genommene Strecke ergeben. Hat man so die Linie x, welche einem Parallelwinkel $\Pi(x)$ entspricht, so wird man den Parallelwinkel $\Pi(y)$ für jede gegebene Strecke y berechnen können.

Anmerkungen.

1. Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie.

Die nichteuklidische Geometrie stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, wie sich die Lehrsätze der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie abändern, wenn man die Annahme fallen lässt, dass es durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden in der durch den Punkt und die Gerade gebildeten Ebene nur eine einzige Gerade giebt, welche die erste Gerade nicht schneidet. (Diese Gerade heisst dann die Parallele zur ersten Geraden.) Während dieses Axiom lange Zeit hindurch nicht angezweifelt worden ist, hat man die genannte Aufgabe erst seit dem Anfang des neunzehnten Jahrhunderts ernsthaft in Angriff genommen. Sind auch schon früher Ansätze gemacht worden, die Folgerungen zu untersuchen, die sich ergeben, wenn man das Parallelenaxiom fallen lässt, so ist dies doch fast ausnahmslos nur geschehen, um den Euklid »von allen Flecken zu befreien« und die Geometrie, welche auf das Parallelenaxiom verzichtet, ad absurdum zu führen. (Vgl.: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf *Gauss*, eine Urkundensammlung zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In Gemeinschaft mit *F. Engel* herausgegeben von *P. Stäckel*, Leipzig 1895). Erst *Gauss* hat die Geometrie ohne Parallelenaxiom, oder die nichteuklidische Geometrie ausgebildet, allerdings nur für sich, ohne jemals darüber etwas zu veröffentlichen. Dagegen hat er mehrfach Kritiken über (vermeintliche) Beweise des Parallelenaxioms veröffentlicht, auch in Briefen von seinen eigenen Untersuchungen gesprochen. [Vgl.: Werke von *Carl Friedrich Gauss*, Band VIII, S. 157—268. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig 1900]. Doch schreibt er an *Schumacher* am 17. Mai 1831 [a. a. O. Seite 212], dass seine Meditationen über diesen Gegenstand zum Theil vierzig Jahre alt sind, und dass er nun einiges aufgeschrieben habe, denn er wünsche nicht, dass alles mit ihm unterginge. In seinem

Nachlass haben sich in der That einige Bemerkungen auf Zetteln gefunden, von denen die wichtigsten die a. a. O. unter der Ueberschrift: »Zur Theorie der Parallellinien« [S. 202—208] und: »Die sphärische und die nichteuklidische Geometrie« [S. 255—257] (Inhalt: Ableitung von Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks bestehenden Gleichungen unter der Voraussetzung der Gültigkeit der euklidischen Geometrie für unendlich kleine Dreiecke und der weiteren Annahme, dass die Gebilde freie Bewegung gestalten) veröffentlicht sind.

Ein vollständiges Lehrgebäude der nichteuklidischen Geometrie hat sich im Nachlass von *Gauss* nicht gefunden. In den Ruhm, ein solches zuerst veröffentlicht zu haben, theilen sich zwei ausländische Mathematiker. Der eine ist *Nicolaus Iwanowitsch Lobatschefskij*, von dem sogleich noch die Rede sein wird, der andere *Johann Bolyai*, ein Ungar, dessen Vater *Wolfgang Bolyai* ein Studienfreund von *Gauss* war und selbst noch versucht hatte, einen Beweis des Parallelenaxiomes zu geben. *Lobatschefskij*'s Abhandlung »Ueber die Anfangsgründe der Geometrie« erschien im Jahre 1829, allerdings für die Mehrzahl der Mathematiker unzugänglich, da sie in russischer Sprache im »Kasaner Boten« veröffentlicht ist. *J. Bolyai*'s »Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens« erschien als Anhang zu dem Lehrbuche seines Vaters (»Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos . . . introducendi . . .) im Jahre 1832. (Beide Werke sind wieder herausgegeben Budapest 1897). *J. Bolyai*'s Werk wurde von *Gauss* sehr gelobt in einem Briefe an seinen Freund *Wolfgang B.* vom 6. März 1832 [*Gauss* Werke VIII, Seite 220], oder vielmehr, *Gauss* meinte, er dürfte die Schrift nicht loben, denn »sie loben, hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt wird, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein.« *Lobatschefskij*'s Untersuchungen wurden *Gauss* erst später zugänglich, zuerst die »Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840« (siehe unten); dann aber hat *Gauss* sich die russische Sprache angeeignet, um auch die andern Schriften lesen zu können. Er schreibt darüber an *Schumacher* in seinem Briefe vom 28. November 1846 [*Gauss* Werke VIII, Seite 238], dass er neues darin nicht gefunden habe, »aber die Ent-

wickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von *Lobatschefskij* auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste«.

Soviel sei hier zur Einleitung bemerkt, um das Verhältniss der beiden Männer, die zum ersten Male die nichteuklidische Geometrie ausführlich und jeder für sich auf Grund selbständiger Untersuchungen dargestellt und veröffentlicht haben, zu ihrem ersten Entdecker anzugeben.

2. N. J. Lobatschefskij's Leben und Werke.

Eine ausführliche Lebensbeschreibung *Lobatschefskij*'s, der auch die folgenden Mittheilungen entnommen sind, findet sich in dem Buche: *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij*. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers von *F. Engel*. Zwei Theile. Leipzig 1898 und 1899 (Erster Theil: Die Uebersetzung. Zweiter Theil: Anmerkungen. *Lobatschefskij*'s Leben und Schriften. Register).

Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, am 22. October (2. November) 1793 in einer Stadt des Gouvernements Nischni-Nowgorod geboren, war der zweite Sohn seiner Eltern. Sein Vater, der eine bescheidene Lebensstellung hatte, starb früh, schon im Jahre 1797. Die Wittwe zog nach Kasan, wo sie es durchsetzte, dass ihre drei Söhne auf Staatskosten erzogen wurden. *Lobatschefskij* besuchte das Gymnasium und studirte von 1807 an bis 1811, wo er Magister wurde an der im Jahre 1805 gegründeten Universität Kasan. Den grössten Einfluss auf ihn hatte der Professor der Mathematik *Bartels*, ein Landsmann und Freund von *Gauss*, der mit einer Reihe von andern deutschen Gelehrten an der russischen Universität gewirkt hat.

Der Universität, an der er studirt hat, hat *Lobatschefskij* auch seine ganze Lehrthätigkeit gewidmet, vom Jahre 1812 an, wo er den Auftrag erhielt, einen zweistündigen Lehrkurs über Geometrie und Arithmetik abzuhalten, bis zum Jahre 1846. 1816 wurde er zum Professor ernannt. 1827—1846 war er Rector der Universität. Dann wurde sein Lehrauftrag, der ihm schon über die gesetzmässigen 25 Jahre hinaus verlängert worden war, nicht erneuert, er wurde aber zum Vertreter des Kurators ernannt, und erst im Jahre 1855 ganz in den Ruhe-

stand versetzt. Am 12. (14.) Februar 1856 starb er, nach einem Lebensabend, der durch Unglück in seiner Familie (der älteste seiner drei Söhne, die nebst einer Tochter der im Jahre 1832 geschlossenen Ehe entstammten, starb als Student) und Verlust des Augenlichtes getrübt war.

Seine wissenschaftliche Lebensarbeit war in erster Linie der nichteuklidischen (imaginären) Geometrie gewidmet, doch fand sein erster, im »Kasaner Boten« in russischer Sprache erschienener Aufsatz »Ueber die Anfangsgründe der Geometrie« (1829—1830) und die in den Kasaner gelehrten Schriften ebenfalls russisch veröffentlichten »Neue Anfangsgründe der Geometrie« (1835—1838) wenig Anklang. Er wendete sich daher an einen grösseren Kreis, indem er sich der französischen Sprache bediente in der Abhandlung »Géométrie imaginaire« (*Crelle*'s Journal 17, S. 295—320, Berlin 1837) und der deutschen (»Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien« von *Nicolaus Lobatschefskij*. Berlin 1840. In der Fincke'schen Buchhandlung. [Hiervon ist 1887 ein Facsimiledruck erschienen]). Diese Schrift lenkte das Interesse von *Gauss* auf *Lobatschefskij*. Seine letzte zusammenfassende Schrift über die von ihm neu geschaffene geometrische Lehre ist die »Pangeometrie«, welche hier zum ersten Male in deutscher Sprache erscheint. Es giebt davon zwei Originaltexte, einen französischen:

> »Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, par *N. Lobatscheffskij*, Professeur émérite de l'université de Kasan et membre honoraire de l'université de Moscou«

erschienen in einer 1856 zum fünfzigjährigen Jubiläum der Universität Kasan von Professoren dieser Universität herausgegebenen Sammlung, und eine russische Uebersetzung davon, erschienen 1856 in den »Kasaner gelehrten Schriften.« 1867 veröffentlichte *Battaglini* eine italienische Ausgabe im Giornale di Matematiche V, S. 273—336, Neapel 1867.

Der hier veröffentlichten Uebersetzung diente als Grundlage der französische Text in der Gesammtausgabe der geometrischen Abhandlungen *Lobatschefskij*'s (Kasan 1883 und 1886), auf die sich auch die Angabe von Seitenzahlen bezieht.

Zum Schluss sei hier noch angeführt, wie *Lobatschefskij* selbst über die Bedeutung seiner neuen Geometrie geurtheilt hat (»Ueber die Anfangsgründe« u. s. w. § 15).

Nachdem er festgestellt hat, dass in dem uns zugänglichen Theile des Raumes die Euklidische Geometrie mit grosser Annäherung wenigstens, [vgl. unten Anmerkung 40] gilt, bemerkt er:

»Wie das auch sein mag, die neue Geometrie, für die hier nunmehr der Grund gelegt ist, kann, wenn sie auch in der Natur nicht besteht, nichtsdestoweniger in unserer Vorstellung bestehen, und wenn sie auch bei wirklichen Messungen ausser Gebrauch bleibt, so eröffnet sie doch ein neues weites Feld für die Anwendungen von Geometrie und Analysis auf einander.«

3. Anmerkungen zur Uebersetzung.

1) *Zu S. 5.* In seiner Gedächtnissrede auf *Gauss* theilt *Sartorius v. Waltershausen* mit, dass *Gauss* die Uebereinstimmung der Winkelsumme im Dreieck mit zwei Rechten innerhalb der Fehlergrenzen durch Messung des Dreiecks Brocken — Hohenhagen (bei Göttingen) — Inselsberg gefunden hat. (*Gauss* Werke VIII, S. 267).

2) *Zu S. 6.* Eine andere Annahme, die häufig wiederkehrt, ist die, dass gewisse Flächenräume unendlich gross sind. z. B. erklärt *Gauss* in seinem Briefe an *W. Bolyai* (vom 16. Dec. 1799, *G.* W. VIII, S. 159), dass er die Gültigkeit des 11. Axioms beweisen könne, wenn die Annahme gestattet ist, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche.

3) *Zu S. 7.* Vgl. das oben in der Lebensbeschreibung Gesagte.

4) *Zu S. 7.* Der Beweis wird a. a. O. in der bekannten Weise durch Ergänzung zu Kugelzweiecken geführt.

5) *Zu S. 7.* Dieser Satz wird in folgender Weise bewiesen: Es sei etwa in dem Dreiecke ABC, dessen Winkelsumme gleich $\pi + \alpha$ sein möge, A der kleinste Winkel (Siehe Fig. 21). Man halbire BC (D sei die Mitte) und mache $DE = DA$. Es ist dann $\triangle ADB \cong EDC$ und daher die Winkelsumme im Dreieck ABC gleich der Winkelsumme im Dreieck ACE. Ferner ist in dem zuletzt genannten Dreieck einer der drei Winkel,

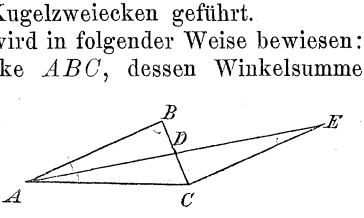

Fig. 21.

etwa DAC wieder nicht grösser als $\frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Indem man nun die Construction, welche vom Dreieck ABC zum Dreieck ACE führte, hinreichend oft wiederholt, würde man zu einem Dreieck gelangen, bei dem die Summe zweier Winkel grösser ist als π, und das ist unmöglich. (Diesen Satz und den folgenden hat zuerst *Legendre* aufgestellt und bewiesen.)

6) *Zu S. 7.* Um diesen Satz zu beweisen, fälle man in dem Dreiecke ABC, dessen Winkelsumme gleich π sei, vom Scheitel des grössten Winkels (B) aus das Lot p auf die gegenüberliegende Seite (Fig. 22). In den beiden rechtwinkligen Theildreiecken muss dann die Winkelsumme auch jedesmal π sein. Hieraus folgt weiter, dass man ein Rechteck mit den beiden Seiten p und q, weiterhin ein Rechteck mit den Seiten np und mq construiren kann (durch Aneinanderlegen von Rechtecken mit den Seiten p und q), wo m und n beliebig grosse ganze Zahlen sind. Zerlegt man dann ein solches Rechteck durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke, so muss in jedem derselben, weil sie congruent sind, die Winkelsumme gleich π sein. Um nun zu zeigen, dass in einem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke DBE die Winkelsumme π ist (Fig. 23), lege man dieses Dreieck in ein grösseres rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $AB = mq > DB$ und $BC = np > BE$ hinein, und ziehe noch die Gerade CD. In jedem der drei Dreiecke ACD, CDE und EDB kann die Winkelsumme nicht grösser als π sein, andererseits ist aber die Summe der Winkel aller drei Dreiecke zusammen gleich 3π, weil das Dreieck ABC die Winkelsumme π hat; und es muss also jedes der Theildreiecke, z. B. auch das Dreieck DBE, die Winkelsumme π haben. Hieraus folgt also, dass zunächst in jedem rechtwinkligen Dreiecke die Winkelsumme π ist, und weiterhin auch in jedem schiefwinkligen Dreieck, weil jedes schiefwinklige Dreieck sich aus zwei rechtwinkligen zusammensetzen lässt. (Geom. Unt. § 20.)

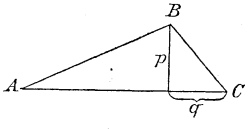

Fig. 22.

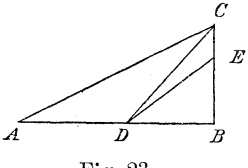

Fig. 23.

7) *Zu S. 8.* Um diesen Satz ohne Anwendung von Grenzbetrachtungen zu beweisen, bedürfen wir zunächst einiger

Hülfssätze über die Mittellote der Seiten eines Dreiecks.

Dieselben lauten:

1) Treffen sich zwei von den Mittelloten der Seiten eines Dreiecks in einem Punkte, so geht auch das dritte durch diesen Punkt. (Beweis elementar, durch Congruenzsätze.)

2) Wenn zwei von den Mittelloten der Seiten eines Dreiecks sich nicht schneiden, dann schneidet auch das dritte keines der beiden ersten. (Dies folgt aus 1.)

Zusatz 1: Haben zwei von den Mittelloten der Seiten eines Dreiecks ein gemeinsames Lot (vgl. Zusatz 2), so haben alle drei ein gemeinsames Lot.

Beweis: Haben (Fig. 24) etwa die Mittellote der Seiten CB und AB das gemeinsame Lot $D'F'$, so fälle man von A, B und C aus die Lote AA', BB' und CC' auf dieses gemeinsame Lot; es bestehen dann die folgenden Congruenzen

$$CDD'C' \cong BDD'B'$$

$$AFF'A' \cong BFF'B'.$$

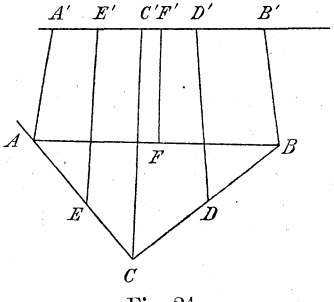

Fig. 24.

Fällt man nun noch von E (der Mitte von AC) aus das Lot EE' auf die Gerade $A'C'F'D'B'$, so ist noch

$$AA'E'E \cong CC'E'E,$$

und daher

$$\sphericalangle E'EA = \sphericalangle E'EC = \tfrac{1}{2}\pi\,,$$ w. z. b. w.

Zusatz 2: Zwei gerade Linien die sich nicht schneiden und einander nicht parallel sind, haben ein gemeinsames Lot.

Beweis (Fig. 25): Man denke sich von E

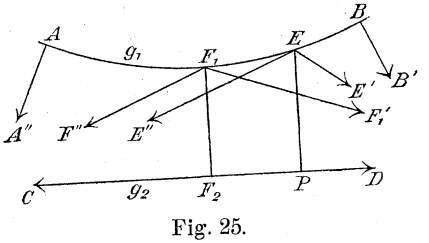

Fig. 25.

(auf g_1 gelegen) das Lot EP auf g_2 gefällt, ferner die Geraden $EE'' \parallel PC$ und $EE' \parallel PD$ gezogen; die beide nothwendig zwischen g_1 und g_2 liegen müssen; endlich seien noch die Geraden $BB' \perp g_1$ und $\parallel EE'$, und $AA'' \parallel EE''$ und $\perp g_1$ gezogen. Die Mitte zwischen den beiden Fusspunkten A und B, nämlich der Punkt F_1, ist dann der eine Fusspunkt des gemeinsamen Lotes. Man kann nämlich leicht beweisen, dass das von F_1 aus auf g_2 gefällte Lot F_1F_2 auch auf g_1 senkrecht steht. Es sei noch $F_1F_1'' (\parallel AA'' \parallel PC)$ und $F_1F_1' (\parallel BB' \parallel PD)$ gezogen, so ist

$$\sphericalangle AF_1F_1'' = \sphericalangle BF_1F_1' = \Pi(AF_1)$$

und

$$\sphericalangle F_2F_1F_1'' = \sphericalangle F_2F_1F_1' = \Pi(F_1F_2),$$

also

$$\sphericalangle AF_1F_2 = \sphericalangle BF_1F_2 = \tfrac{1}{2}\pi .$$

Hiermit ist unter der Voraussetzung, dass es zu jedem spitzen Winkel α eine Strecke a ($\alpha = \Pi(a)$) giebt, der Satz vom gemeinsamen Lot bewiesen.

3) Wenn zwei von den Mittelloten der Seiten eines Dreiecks einander parallel sind, so ist auch das dritte zu diesen beiden parallel.

Beweis: Ist etwa $DD' \parallel FF'$ (Fig. 24), so kann EE' keines der beiden Lote DD' und FF' schneiden (nach 1), es können aber weder EE' und DD' noch EE' und FF' ein gemeinsames Lot haben (nach 2, Zusatz 1); also müssen alle drei Mittellote einander parallel sein.

Durch Anwendung dieses dritten Satzes gelingt es nun leicht, zu beweisen, dass alle Geraden parallel zur Axe des Grenzkreises als Axen dienen können. (Fig. 26.) Um ihn zu beweisen, wollen wir ihm eine etwas andere Fassung geben.

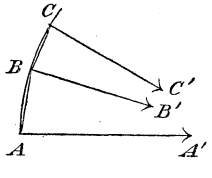

Fig. 26.

Es sei AA' die Axe des Grenzkreises, BB' eine Parallele, CC' ebenfalls; die Punkte B und C, in denen der Grenzkreis diese Parallelen trifft, sind dadurch eindeutig bestimmt, dass $\sphericalangle B'BA = \sphericalangle A'AB$ und $\sphericalangle C'CA = \sphericalangle A'AC$ ist. Nennen wir nun zwei Punkte B und A auf zwei Parallelen BB' und AA' einander correspondirend (nach *Gauss*, vgl.

Gauss Werke VIII, S. 202—208), wenn $\sphericalangle B'BA = \sphericalangle A'AB$, so bekommen wir den Satz:

Die Schnittpunkte des Grenzkreises, dessen Scheitel A und dessen Axe AA' ist, mit den Parallelen zur Axe sind die dem Punkte A correspondirenden Punkte auf diesen Parallelen.

Der zu beweisende Satz aber erhält folgende Fassung:

Sind A und B zwei einander correspondirende Punkte auf den Parallelen AA' und BB', und ebenso A und C auf AA' und CC', so sind auch B und C einander correspondirende Punkte auf den Parallelen BB' und CC'.

Beweis: Weil AB und AC zwei Paare einander correspondirender Punkte sind, ist das Mittellot auf AB ebenso wie das Mittellot auf AC parallel zu AA', BB' und CC', also muss auch, nach dem Satze von den Mittelloten, das Mittellot auf BC parallel sein zu diesen Geraden. (Vgl. auch die nächste Anmerkung.) Hieraus folgt aber, dass $\sphericalangle B'BC = \sphericalangle C'CB$; d. h. es sind B und C einander correspondirende Punkte auf den beiden Parallelen BB' und CC', w. z. b. w. [Vgl. hierzu »Neue Anfangsgründe« § 110—112].

8) *Zu S. 9.* Beim Beweis dieses Satzes vom gegenseitigen Parallelismus dreier Geraden, der z. B. in der vorigen Anmerkung gebraucht worden ist, hat man verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1) Die drei Geraden liegen in einer Ebene; ferner möge $AA' \parallel CC'$ und $BB' \parallel CC'$ sein, und es mögen die Geraden, die in der Figur (Fig. 27) gegebene Reihenfolge haben; es sei ferner die Gerade $ABC \perp CC'$. Eine Gerade AD (ausserhalb AA') kann dann BB' nicht treffen; denn BB' schneidet AA' nicht, weil man sonst durch diesen Schnittpunkt zwei Parallelen zur Geraden CC' hätte. Jede Gerade aber, welche innerhalb AA' verläuft von A aus (z. B. AE), muss BB' schneiden, denn BB' schneidet das Dreieck ACE im Punkte B, muss also aus diesem Dreieck wieder austreten, und der Austrittspunkt kann nur auf der Geraden AE liegen. Wenn $AA' \parallel BB'$ und $BB' \parallel CC'$ vorausgesetzt ist, ändert sich der Beweis ein wenig.

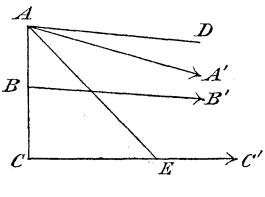

Fig. 27.

Dem Satze können wir, sobald die drei Geraden nicht in einer Ebene liegen, auch folgende Fassung geben: Zwei Parallelen sind in der dritten Geraden parallel, in der zwei durch die beiden ersten Geraden gelegte Ebenen einander schneiden.

Dieser Satz wird so bewiesen (vgl. Fig. 28): Es seien AA' und BB' zwei parallele Gerade, CC' die Schnittlinie von zwei Ebenen, die durch AA' und BB' gehen, es sei ferner $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle ABB' = \frac{1}{2}\pi$. CC' kann weder AA' noch BB' treffen. Es sei endlich noch A_1 auf AA' so bestimmt, dass $\sphericalangle BA_1A = \frac{1}{2}\pi$ ist. Jede Gerade, die im Winkelraume ACA_1 verläuft und von C ausgeht, muss AA' nothwendig treffen; um zu zeigen, dass eine im Winkelraume A_1CC' verlaufende, von C ausgehende Gerade AA' trifft, legen wir durch diese Gerade (CX) und durch CB die Ebene. Diese Ebene schneidet die Ebene $A'ABB'$ in einer Geraden BX, welche, im Winkelraume A_1BB' verlaufend, AA' nothwendig in einem Punkte X treffen muss, d. h. die im Winkelraume A_1CC' verlaufende Gerade trifft AA' in einem Punkte X. Hiermit ist der Parallelismus von AA' und CC' bewiesen; ebenso beweist man den Parallelismus von BB' und CC'.

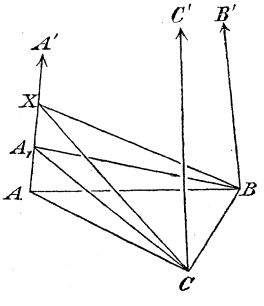

Fig. 28.

9) *Zu S. 9.* Dieser Satz, nämlich dass die Summe der Kantenwinkel eines Parallelkreikants gleich π ist, wird in folgender Weise bewiesen:

Es seien ABC drei Punkte auf den drei Parallelen. Durch einen Punkt B' von BB' und durch die Gerade AC legen wir die Ebene, und construiren sodann um A, C und B' als Mittelpunkte Kugeln vom Halbmesser 1, deren Schnittpunkte mit den in der Figur (vgl. Fig. 29) vorkommenden Gera-

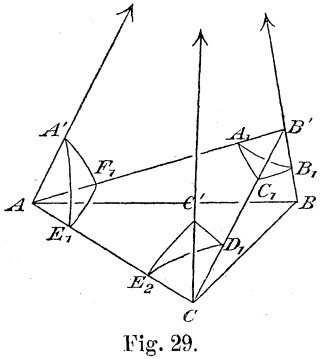

Fig. 29.

den in geeigneter Weise bezeichnet werden. Bezeichnen wir noch die den Kanten AA', BB', CC' zugehörigen Kantenwinkel mit α, β, γ, so ist der Inhalt des sphärischen Dreiecks $E_1A'F_1$:

$$p = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle A'E_1F_1 + \sphericalangle E_1F_1A' + \alpha - \pi);$$

ebenso der Inhalt des sphärischen Dreiecks $E_2C'D_1$:

$$r = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle C'E_2D_1 + \sphericalangle E_2D_1C' + \gamma - \pi).$$

Bezeichnen wir noch den Winkel $\sphericalangle A'E_1F_1 = \sphericalangle C'E_2D_1$ mit δ, so ergeben die beiden Gleichungen:

$$\sphericalangle E_1F_1A' = 2p + \pi - \alpha - \delta$$
$$\sphericalangle E_2D_1C' = 2q + \pi - \gamma - \delta.$$

Endlich ergiebt sich für den Inhalt des sphärischen Dreiecks $B_1A_1C_1$ der Werth

$$r = \tfrac{1}{2}(\delta + \alpha - 2p + \delta + \gamma - 2q + \beta - \pi)$$
$$= \delta - p - q + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Lässt man nun B' immer weiter im Sinne des Parallelismus sich von B entfernen, so nähern sich die vier Grössen r, δ, p und q alle der Grenze Null, und hieraus folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ w. z. b. w.}$$

10) *Zu S. 9.* Zum Beweise dieses Satzes sei Folgendes bemerkt:

Es sei (Fig. 30) $AA' \parallel BB'$ und $AB \perp BB'$, ferner B_1 ein Punkt auf BB' der von B aus nach der Seite des Parallelismus entfernt ist; man errichte in ihm das Lot $B_1A_1 = BA$ und ziehe die Gerade AA_1, endlich errichte man auf BB_1 das Mittellot B_2A_2. Man erkennt dann sofort, dass A_2A_1 und B_2B_1 sich weder schneiden, noch parallel zu einander sein können, dann muss aber der Schnittpunkt von AA' und B_1A_1 nothwendig zwischen A_1 und B_1 liegen, weil die Parallele nothwendig zwischen der schneidenden Geraden AB' und der nicht schneidenden Geraden AA_1 liegt, d. h. es nimmt die Entfernung der beiden Parallelen (die Länge des von einem Punkte der einen auf die andere gefällten Lotes) nach der Seite des Parallelismus hin ab.

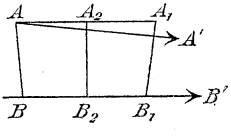

Fig. 30.

11) *Zu S. 16.* Man erhält die hier entwickelten Formen sofort durch Betrachtung des Ebenenstückes $C'CBB'$ (Fig. 3), indem man noch durch C den Grenzkreis legt, dessen Axe CC' ist.

12) *Zu S. 31.* Gemeint ist die oben in der Lebensbeschreibung erwähnte Abhandlung »Ueber die Anfangsgründe der Geometrie«.

13) *Zu S. 32.* Diese Erklärung des Grenzkreises haben wir oben (Anmerkung 7) benutzt, um ohne Grenzübergänge die Eigenschaften des Grenzkreises abzuleiten.

14) *Zu S. 34.* Die Formel

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

für den Kreisumfang, welche für $k = 1$ in die *Lobatschefskij*sche übergeht, hat *Gauss* bereits im Jahre 1831 in einem Briefe an *Schumacher* mitgetheilt (*Gauss* Werke VIII, S. 218).

15) *Zu S. 37.* Um die Formel 23 zu erhalten, hat man zuerst den Nenner der vorhergehenden Formel zu vereinfachen. Die Glieder, welche $\operatorname{tang} L$ nicht enthalten, sind

$$\cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) - \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x),$$

und dieser Ausdruck verschwindet, da

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a).$$

Der Factor von $\operatorname{tang} L$ wird

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x) \cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) + \sin A \\
&= \frac{(\sin \Pi(a) \cos \Pi(x) \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) + \cos \Pi(a) \operatorname{tang} A) \cos A}{\cos \Pi(a)} \\
&= \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \frac{\sin \Pi(x)}{\cos \Pi(x)} (1 - \sin^2 \Pi(a) \sin^2 \Pi(x)) \\
&= \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \frac{\sin \Pi(x)}{\cos \Pi(x)} \cos^2 \Pi(r).
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in die zu vereinfachende Formel ein, und berücksichtigt man noch, dass

$$\cos \Pi(r) = \cos \Pi(x) : \cos A,$$

so erhält man Formel (23).

16) *Zu S. 40.* Man vergleiche hierzu die geometrische Ableitung desselben Satzes in Anmerkung 7, 2), Zusatz 2.

17) *Zu S. 42.* An Stelle dieser zweiten Formel steht bei *Lobatschefskij* sowohl im russischen wie im französischen Text der folgende Ausdruck

$$\cos\Pi(q) = \cos\Pi(\Delta x)\sin\Pi(y_1)\,.$$

18) *Zu S. 48.* Es ist nämlich bis auf Grössen zweiter Ordnung nach dem soeben entwickelten Satze der Inhalt dJ des Vierecks, das von den beiden Ordinaten y und $y + dy$, dem Curvenelemente ds und dem Elemente dx der Abscissenaxe begrenzt ist:

$$dJ = 2\pi - 3\cdot\tfrac{1}{2}\pi - \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,.$$

Dabei ist unter φ der Winkel zu verstehen, den das vom ersten Punkte auf die Ordinate des zweiten Punktes gefällte Lot mit der Ordinate des ersten Punktes einschliesst. Wendet man nun hierauf die Formel (vgl. Zusatz) an:

$$\cos\varphi = \cot\Pi(y)\cot\Pi(dx)\,,$$

so kommt bis auf Grössen zweiter Ordnung die zu beweisende Formel

$$dJ = dx\cot\Pi(y)\,.$$

Zusatz. Um die hier angewendete Formel zu beweisen, die sich auf das Viereck mit drei rechten Winkeln bezieht, müssen wir auf die Formeln (25) und (26) (Seite 39) zurückgreifen. Danach wird in dem Viereck (Fig. 12)

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}} = \frac{\cos\Pi(a)\cos\Pi(x)}{\sqrt{\cos^2\Pi(x)\cos^2\Pi(a)+\sin^2\Pi(a)}}$$

$$= \frac{\cos\Pi(y)\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)\sqrt{\cos^2\Pi(x)\dfrac{\cos^2\Pi(y)}{\sin^2\Pi(x)}+1-\dfrac{\cos^2\Pi(y)}{\sin^2\Pi(x)}}} = \frac{\cos\Pi(y)\cos\Pi(x)}{\sqrt{\sin^2\Pi(y)\sin^2\Pi(x)}}\,;$$

also

$$\cos\varphi = \cot\Pi(y)\cot\Pi(x)\,.$$

Setzt man darin für x ein dx, so erhält man die angewendete Formel.

19) *Zu S. 48.* Bei *Lobatschefskij* steht sowohl im russischen wie im französischen Texte hier $\sin^2\xi$ an Stelle von $\cos^2\xi$.

20) *Zu S. 48.* Um die Formeln zu bestätigen, hat man, indem man

$$\Pi(y) = \eta\,,\quad \Pi(x) = \xi\,,\quad \Pi(a) = \alpha$$

setzt, zu berücksichtigen, dass

$$\cos\alpha = \cos\eta \sin\xi$$

und

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\cos\xi}$$

ist.

Diesen Formeln kann man durch Elimination von η die Gestalt geben:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\cos\xi} = \frac{\sqrt{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos\xi},$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,tang}\omega}{d\xi} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\xi}}$$

$$\times \left\{ \frac{\sin\xi\cos\xi}{\cos\alpha\cos\xi\sqrt{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}} + \frac{\sin\xi\sqrt{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos^2\xi} \right\}$$

$$= \frac{\sin\xi\cos^2\alpha\cos^2\xi\cdot(1 - \cos^2\alpha)}{(\cos^2\alpha\cos^2\xi + \sin^2\xi - \cos^2\alpha)\cos\alpha\cos^2\xi\sqrt{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\xi\sqrt{\sin^2\xi - \cos^2\alpha}}.$$

Dasselbe erhält man durch Differentiation des Integrals.

21) *Zu S. 52.* Die letzte Formel kann nämlich auch so geschrieben werden

$$\cos C \sin \Pi(c) = \sin A.$$

was mit der ersten Gleichung (10) übereinstimmt, sobald man darin a, A und B mit c, C und A vertauscht.

22) *Zu S. 55.* Bei *Lobatschefskij* steht im Russischen und im Französischen auf der linken Seite dieser Formel

$$[\pi - A - B - C]\cdot[\operatorname{cotg} C \sin\alpha + \cos\alpha].$$

23) *Zu S. 59.* Diese Angabe über das Dreiecksnetz reicht nicht aus, damit es sich dem Flächeninhalte nähert; es muss z. B. hinzukommen, dass die Winkel, die die Ebene eines derartigen Dreiecks mit der Tangentialebene bilden, sich der Grenze Null nähern. Natürlich sind aber alle hinreichenden Bedingungen in den hier vorkommenden Fällen immer erfüllt. (Man vgl.: *H. A. Schwarz*, Mathematische Abhandlungen II, S. 309—311. Berlin 1890.)

24) *Zu S. 61.* Bei *Lobatschefskij* steht hier im russischen wie auch im französischen Texte $(e^c + 1)$ an Stelle von $(e^x + e^{c-x})$ im Nenner.

25) *Zu S. 65.* Bei *Lobatschefskij* steht hier sowohl im russischen wie im französischen Texte der falsche Werth

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

Um den richtigen Werth zu erhalten, berücksichtige man, dass [Seite 53]

$$\begin{aligned} P^2 &= -(1 + \tfrac{1}{2}a^2)^2 - (1 + \tfrac{1}{2}b^2)^2 - (1 + \tfrac{1}{2}c^2)^2 \\ &+ 2\big(1 + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\big) + 1 \\ &= \tfrac{1}{4}\{-a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\} \end{aligned}$$

wird. — Bei *Lobatschefskij* steht dann auch noch die falsche Formel für den Inhalt:

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

26) *Zu S. 66.* Bei *Lobatschefskij* steht (im französischen Text) in der folgenden Formel fälschlich $\Pi(z)$ für $\sin\Pi(z)$.

27) *Zu S. 66.* Im Nenner steht hier noch der Factor 2; es muss also bei Berechnung der Oberfläche dieser Ausdruck mit $2\,dx\,dy$ multiplicirt werden, so dass man hat

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\sin\Pi(z)}\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\Pi(y)}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\Pi(y)\sin^2\Pi(z)}},$$

denn der in der Formel des Textes stehende Ausdruck ist, mit $dx\,dy$ multiplicirt, der Inhalt eines unendlich kleinen Dreiecks und nicht der eines unendlich kleinen Parallelogramms!

28) *Zu S. 68.* Bei *Lobatschefskij* steht im französischen Texte der Pangeometrie im Zähler der folgenden Formel $\cos\Pi(r)$ statt $\cos^2\Pi(r)$; im Nenner hat der russische Text ausserdem noch $\sin^2\varphi$ für $\sin^2\psi$. Richtig steht die Formel in § 34 der Arbeit »Ueber die Anfangsgründe der Geometrie«; ebenso die folgenden Formeln.

29) *Zu S. 68.* Mit $8\,d\varphi\,d\psi$ wird multiplicirt wegen der acht Kugelconstanten.

30) *Zu S. 68.* Bei *Lobatschefskij* fehlt in beiden Texten die Zahl 2 im Nenner der folgenden Formel.

31) *Zu S. 68.* Bei *Lobatschefskij* fehlt in beiden Texten bei der folgenden Formel die Zahl 2 im Nenner auf der linken Seite und der Factor x im Zähler auf der rechten Seite. Ferner ist $\alpha = \cos \Pi(r)$ zu setzen.

32) *Zu S. 69.* Dieselben »Grenzkreiscoordinaten« sind oben (S. 47) zur Berechnung des Flächenelements angewendet worden.

33) *Zu S. 70.* Bei *Lobatschefskij* steht in der folgenden Formel im Nenner fälschlich $d\zeta\ d\eta\ dx$ im russischen, $d\xi\ d\eta\ dx$ im französischen Texte.

34) *Zu S. 71.* Bei *Lobatschefskij* steht im französischen Texte t für ϑ.

35) *Zu S. 73.* Bei *Lobatschefskij* steht im französischen Texte auf der rechten Seite der folgenden Formel $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{8}$.

36) *Zu S. 73.* »in jeder Beziehung endlich« soll offenbar heissen, dass nicht nur das Volumen des Stumpfes endlich ist, sondern auch die Oberfläche und die Entfernung je zweier Punkte, die in dem betrachteten Raumtheile oder an seiner Grenze gelegen sind.

37) *Zu S. 75.* Vgl. die vorige Anmerkung.

38) *Zu S. 75.* In der »Géométrie imaginaire« (*Crelle*'s Journal Bd. 17, S. 295—320, Berlin 1837) hat *Lobatschefskij* in der That die Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck zum Ausgangspunkte gewählt. Doch war diese Form der Darstellung zur Verbreitung seiner Ideen wenig geeignet; denn selbst *Gauss*, der doch in diesen Theorien genau Bescheid wusste, nennt die Schrift einen »verworrenen Urwald«. (Brief an *Gerling* vom 8. Februar 1844. *Gauss* Werke VIII, S. 236).

39) *Zu S. 76.* Vgl. Anmerkung 1.

40) *Zu S. 77.* Gegen die hier entwickelte Methode zur Bestimmung des Parallelwinkels ist mancherlei einzuwenden: Vor Allem ist die Messung des Winkels δ unmöglich (vgl. den Vortrag von *K. Schwarzschild*: Ueber das zulässige Krümmungsmaass des Raumes. Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 35. Jahrgang. S. 337—347. Berlin 1900). Ausserdem aber setzt die Specialisirung für den Fall $\delta = 0$ voraus, dass der Fixstern unendlich weit entfernt ist, eine Voraussetzung, die doch nicht gut annehmbar ist!

Dagegen kann man nach einer andern, ebenfalls von *Lobatschefskij* herrührenden Methode durch Berechnung der jährlichen Parallaxe eines Sternes zuerst eine (untere) Grenze für

den Parallelwinkel $\Pi(a)$ angeben, wo a der Erdbahndurchmesser ist, und dann den Betrag berechnen, um den sich die Winkelsumme in einem (natürlich möglichst gross zu wählenden) Dreieck höchstens von zwei Rechten unterscheidet. (»Ueber die Anfangsgründe der Geometrie«, § 15, S. 23 der Ausgabe von *Engel*). Auf diese Art ergiebt sich, dass sich die Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Linie von einer bestimmten Stellung der Erde zum Stern 29 Eridani ist, während die eine Kathete der Erdbahnhalbmesser ist, von zwei Rechten um höchstens $0''{,}43$ unterscheidet. Dabei ist $\Pi(a)$ mit Hülfe des Sirius bestimmt. (Vgl. auch den *Schwarzschild*'schen Vortrag).

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.